

基于多级排样方式的单一矩形件卷材下料算法

覃广荣¹, 丘刚玮¹, 王 坤², 黄 欣¹

(1. 广西农业职业技术大学 信息与机电工程系, 广西 南宁 570003; 2. 四川信息职业技术学院 信息工程系, 四川 广元 628017)

摘要: 讨论了单一矩形件卷材下料问题, 即采用剪切工艺将卷材切割出一定数量的同种矩形件, 目标为使得所耗费的卷材长度最小。提出一种基于隐式枚举法和动态规划算法的优化下料算法。切割过程由2个阶段组成, 第1阶段将卷材切割成宽度相同、长度不大于剪刀长度的段, 第2阶段将段切割成矩形件。首先, 采用隐式枚举法确定所有需要考察的段的长度, 并采用动态规划算法确定不同长度段中矩形件的多级排样方式; 然后, 选择材料利用率最高的段, 按照该段使用数量最大且不产生多余矩形件的原则确定该段的使用数量; 最后, 选择一个长度最小的段来满足矩形件的剩余需求量。与普通下料算法进行对比, 实验结果表明: 基于隐式枚举法和动态规划算法的优化下料算法可以有效地解决单一矩形件卷材下料问题。

关键词: 矩形件; 卷材下料问题; 多级排样方式; 动态规划; 隐式枚举

DOI: 10.13330/j.issn.1000-3940.2022.02.010

中图分类号: TP391

文献标志码: A

文章编号: 1000-3940 (2022) 02-0073-05

Coil cutting algorithm of single rectangular pieces based on multi-stage layout

Qing Guangrong¹, Qiu Gangwei¹, Wang Kun², Huang Xin¹

(1. Department of Information and Electromechanical Engineering, Guangxi Agricultural Vocational and Technical University, Nanning 570003, China; 2. Department of Information Engineering, Sichuan Institute of Information Technology, Guangyuan 628017, China)

Abstract: The coil cutting problem of single rectangular piece was discussed, that was, a certain number of the same kind of rectangular pieces were cut from the coil by the shearing process, and the goal was to minimize the length of the coil consumed. Then, an optimal cutting algorithm was proposed based on the implicit enumeration method and the dynamic programming algorithm, and the cutting process consisted of two stages. In the first stage, the coil was cut into segments with the same width and the length less than the cutting blade length, and in the second stage, the segments were cut into rectangular pieces. First, the length of all the segments to be investigated was determined by the implicit enumeration method, and the multi-stage layout of rectangular pieces in the segments of different lengths was determined by the dynamic programming algorithm. Then, the segment with the highest material utilization rate was selected, and the number of use for this segment was determined according to the principle of the largest use for this section and no redundant rectangular pieces. Finally, the segment with the smallest length was selected to meet the remaining demand of rectangular pieces, and the above-mentioned cutting algorithm was compared with the ordinary cutting algorithm. The experimental results show that the optimal cutting algorithm based on implicit enumeration method and dynamic programming algorithm can effectively solve the coil cutting problem of single rectangular piece.

Key words: rectangular pieces; coil cutting problem; multistage layout; dynamic programming; implicit enumeration

钣金制造企业经常采用剪切机将卷材分割成矩形件用以生产各种产品。合理的下料方案可以提高材料利用率、节约资源、降低企业生产成本^[1-3]。

卷材的宽度一般在900~1300 mm范围内, 长宽比一般大于100。有2种典型的切割工艺可将卷材分割成矩形件, 每种切割工艺均含有2个阶段。第1种为切割-切割工艺, 第1阶段用剪切机将卷材横切成多个段, 第2阶段将段切割成矩形件。每个段的宽度与卷材宽度相同; 每个段的长度可能互相不同, 但是长度不大于第2阶段剪切机的剪刀长度。第2种为分切-切割工艺, 第1阶段用纵切机将卷材纵向分切成宽度更小的子卷材, 第2阶段用剪切机将子卷材切割成矩形件。

本文讨论单一矩形件卷材下料问题, 采用切

收稿日期: 2020-07-12; 修订日期: 2020-10-11

基金项目: 2019年第二批广西农业科技自筹经费项目(YKJ1929, Z2019102); 教育部新一代信息技术创新项目(2020ITA03027); 广西农业职业技术大学科学研究与技术开发计划课题(YKJ2124)

作者简介: 覃广荣(1980-), 男, 硕士, 讲师

E-mail: grqz1@163.com

通信作者: 黄欣(1983-), 男, 硕士, 副教授

E-mail: nyzg2001@163.com

割-切割工艺,用最小长度的卷材切割出指定数量的同种矩形件。

目前,针对板材下料问题的研究较多^[4-6],而针对卷材下料问题的研究相对较少。针对板材下料问题,文献[7]提出了单一下料的动态规划算法。文献[8]提出了单一下料的拼合算法。文献[9]提出了单一下料的递归算法。针对卷材下料问题,文献[10]提出了多种矩形件套裁下料的多段下料算法,将下料过程分为3个阶段:第1阶段将卷材切成段,第2阶段将段切为条带,第3阶段将条带切为矩形件。首先,采用动态规划算法确定段和条带的最优排样方式;然后,采用顺序启发式算法确定各段的使用次数,得到下料方案。文献[11]提出了套裁下料的顺序启发式算法。虽然单一下料可以看作是只有一种矩形件的特殊情形下的套裁下料,但是单一下料有其本身的特殊性,套裁下料算法不一定能较好地适用于单一下料问题。需要针对单一下料问题设计专门的下料算法。

本文针对单一矩形件卷材下料问题,设计了一种基于多级排样方式的下料算法。首先,构造隐式枚举法和动态规划算法相结合的算法,生成所有规范长度的段的最优多级排样方式;然后,按照材料利用率最大原则确定最优整段的长度,用最优整段满足矩形件的绝大部分需求量,对于未满足的小部分剩余需求量,选择一个最小长度的段来满足。

1 问题描述及相关概念

1.1 问题描述

单一矩形件卷材下料问题:用剪刀长度为 L' 的剪切机将宽度为 W 、长度足够长的卷材切割出 n 个尺寸为 $l \times w$ (l 为长度、 w 为宽度)的矩形件,优化目标为所用的卷材长度最小。下料时,剪切机首先将卷材横切为宽度与卷材宽度相同的段,然后将段切割出矩形件。设长度为 L_i 的段包含 t_i 个矩形件,下料方案包含 a_i 个长度为 L_i 的段。则单一矩形件卷材下料问题的数学模型为:

$$\begin{aligned} \min L &= \sum_{i=0}^M a_i L_i \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{i=0}^M a_i t_i \geq n \\ a_i \in N, L_i \in N \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: N 为非负整数集合; L 为下料方案使用的卷

材长度; n 为矩形件的个数; i 为段的编号, $i=0, 1, \dots, M$; M 为所有长度不大于剪刀长度的段的数量。

式(1)的目标函数为下料方案所用卷材长度最小。第1行约束条件表示下料方案的各个段产生的矩形件总数量大于矩形件的需求量;第2行约束条件表示每个段的数量为非负整数,每个段的长度为非负整数。

1.2 多级排样方式

假设段、级的水平边为长度,竖直边为宽度。图1为多级排样方式示意图,箭头表示从段上切下级的切割线位置,箭头的编号表示各个级的切割顺序。多级排样方式将段划分为多个级,每个级中排放方向相同的矩形件,相邻级中的矩形件的方向互相垂直。第1级的宽度等于段的宽度;第2级的长度等于段的长度减去第1级的长度。以此类推,当级数 $k>1$ 时:若 k 为奇数,则第 k 级的宽度等于段的宽度减去级数小于 k 的所有偶数级的宽度之和;若 k 为偶数,则第 k 级的长度等于段的长度减去级数小于 k 的所有奇数级的长度之和。

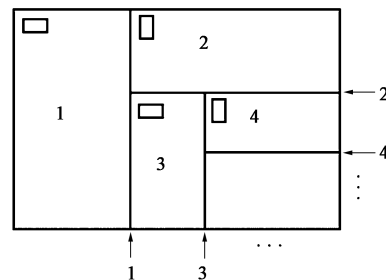


图1 多级排样方式示意图

Fig. 1 Schematic diagram of multi-stage layout method

分析可知, $(k+1)$ 级排样方式是 k 级排样方式的超集,因此, $(k+1)$ 级排样方式的材料利用率等于或大于 k 级排样方式。故随着级数的增加,多级排样方式的材料利用率增加,但同时切割难度也增加。为了平衡材料利用率和切割工艺复杂度,本文设定多级排样方式的最大级数为5。

例1:尺寸为 $500 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ 的段最多可以排放多少个尺寸为 $37 \text{ mm} \times 23 \text{ mm}$ 的矩形件?

按照普通方式排样:当矩形件水平排放时,最多可以排放的矩形件个数为: $\lfloor 500/37 \rfloor \times \lfloor 300/23 \rfloor = 169$;当矩形件竖直排放时,最多可以排放的矩形件个数为: $\lfloor 500/23 \rfloor \times \lfloor 300/37 \rfloor = 168$ 。采用本文的4级排样方式,如图2所示,可排放175个矩形件。分析可知,段中可排放的矩形件个数的理论上界为:

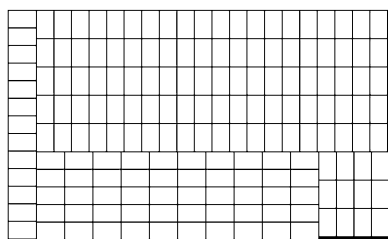


图2 一个4级排样方式例图

Fig. 2 Example diagram of a four-stage layout method

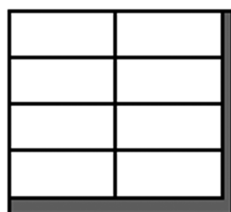
$\lfloor (500 \times 300) / (37 \times 23) \rfloor = 176$, 此上界为段的面积除以矩形件的面积。需注意的是, 面积上界不一定可达, 例如尺寸为 $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ 的段最多只可排放 1 个尺寸为 $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ 的矩形件, 但面积上界为 $\lfloor (3 \times 3) / (2 \times 2) \rfloor = 2$ 。可知 4 级排样方式非常接近理论最优解。另外, 普通排样方式其实是 1 级排样方式。

2 多级排样方式的生成算法

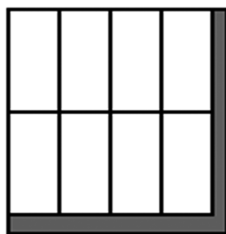
记级中包含的矩形个数为级的价值, 多级排样方式中包含的矩形个数为多级排样方式的价值。排样算法是通过最大化多级排样方式的价值来确定最优多级排样方式。

2.1 级的价值

同一级中只排放方向相同的矩形件, 称排放水平矩形件的级为 X 向级, 排放竖直矩形件的级为 Y 向级, 如图 3 所示。



(a)



(b)

图3 级的示意图

(a) X 向级 (b) Y 向级

Fig. 3 Schematic diagrams of stages

(a) Stage in X direction (b) Stage in Y direction

令尺寸为 $x \times y$ 的 X 向级的价值函数为 $J_X(x, y)$, Y 向级的价值函数为 $J_Y(x, y)$, 最优级的价值函数为 $J(x, y)$, 则有式 (2) ~ 式 (4):

$$J_X(x, y) = \lfloor x/l \rfloor \times \lfloor y/w \rfloor \quad (2)$$

$$J_Y(x, y) = \lfloor x/w \rfloor \times \lfloor y/l \rfloor \quad (3)$$

$$J(x, y) = \max \{ J_X(x, y), J_Y(x, y) \} \quad (4)$$

2.2 多级排样方式的价值

设段的长度为 E , 由于段的宽度与卷材的宽度相同, 故段的尺寸为 $E \times W$ 。从图 1 可知, 当确定了各个级的切割线位置后, 各个级的尺寸即被确定。以左下角为原点、段的下边为 X 轴、段的左边为 Y 轴建立直角坐标系。设切割线 1 的横坐标为 x_1 、切割线 3 的横坐标为 x_3 ; 切割线 2 的纵坐标为 y_2 、切割线 4 的纵坐标为 y_4 。则第 1 级的尺寸为 $x_1 \times W$ 、第 2 级的尺寸为 $(E - x_1) \times (W - y_2)$ 、第 3 级的尺寸为 $(x_3 - x_1) \times y_2$ 、第 4 级的尺寸为 $(E - x_3) \times (y_2 - y_4)$ 、第 5 级的尺寸为 $(E - x_3) \times y_4$ 。已知各级的尺寸后, 由式 (2) ~ 式 (4) 计算得到各级的价值, 记各级的价值变量分别为 V_1, V_2, V_3, V_4 和 V_5 。

设尺寸为 $E \times W$ 的多级排样方式的价值函数为 $F[E, W]$, 则有:

$$F[E, W] = \max_{0 \leq x_1 \leq E} \max_{0 \leq y_2 \leq W} \max_{x_1 \leq x_3 \leq E} \max_{0 \leq y_4 \leq y_2} \sum_{j=1}^5 V_j \quad (5)$$

式中: j 为级的数量, $j=1, 2, \dots, 5$ 。

式 (5) 的目标函数为最大化多级排样方式的价值。4 个约束条件分别为: 切割线 1 的横坐标 x_1 介于 $0 \sim E$ 之间, 切割线 2 的纵坐标 y_2 介于 $0 \sim W$ 之间, 切割线 3 的横坐标 x_3 介于 $x_1 \sim E$ 之间, 切割线 4 的纵坐标 y_4 介于 $0 \sim y_2$ 之间。

3 下料方案生成算法

隐式枚举算法考察所有长度不大于剪切机剪刀长度的段的最优多级排样方式。选择材料利用率最大的段作为最优段。首先, 按照不产生多余矩形件且最优段使用次数最大原则确定最优段的使用次数, 用最优段满足矩形件的绝大部分需求量; 然后, 选择一个长度最小的段来满足矩形件的剩余需求量。算法步骤如下:

步骤 1: 初始化段的长度 $E = \min \{ l, w \}$, 此时段的材料利用率 $U=0$ 。

步骤 2: 如果不存在非负整数 a, b 使得 $E = a \times l + b \times w$ 成立, 则转步骤 3; 否则调用上节排样算法

中生成段 $E \times W$ 的最优多级排样方式, 并得到其价值 $F[E, W]$, 若此时材料利用率 $U_0 = F[E, W] \times l \times w / (E \times W) < U$, 则 $U = U_0$, 最优段长度 $E_{\text{最优段}} = E$ 。

步骤 3: 如果 $E < L'$, 则令 $E = E + 1$, 转步骤 2; 否则转步骤 4。

步骤 4: 令矩形件剩余需求量 $n_{\text{剩余}} = n\% \times F[E_{\text{最优段}}, W]$

步骤 5: 初始化剩余段长度 $E_{\text{剩余段}} = \lfloor (n_{\text{剩余}} \times l \times w) / W \rfloor$ 。

步骤 6: 如果不存在非负整数 a, b 使得 $E = a \times l + b \times w$ 成立, 则转步骤 7; 否则判断 $F[E, W] \geq n_{\text{剩余}}$ 是否成立, 如果成立, 则令 $E_{\text{剩余段}} = E$, 转步骤 8, 否则转步骤 7。

步骤 7: 令 $E = E + 1$, 转步骤 6。

步骤 8: 输出最优下料方案。

步骤 1~步骤 3, 确定最优段的长度和矩形件在最优段上的排样方式。其中步骤 2 表示: 如果该段长度是规范长度, 则考察该段的最优多级排样方式, 记录材料利用率最大的段为当前最优段; 如果该段不是规范长度^[12], 则直接舍弃, 不予考察。步骤 3 表示, 如果段的长度不大于剪切机的剪刀长度, 则考察该段, 否则不考察。

步骤 4~步骤 7, 确定剩余段的长度和矩形件在剩余段上的排样方式。其中, 步骤 4 表示矩形件剩余需求量等于矩形件总需求量除以每个最优整段排放的矩形件数量而得到的余数。步骤 5 表示, 初始化剩余段长度为剩余矩形件的总面积除以段的宽度。步骤 6 和步骤 7 表示, 从小到大逐个考察规范长度的剩余段, 选择长度最小且排放的矩形件数量不少于矩形件的剩余需求量的段为最优剩余段。

4 实验计算

用 C++ 语言实现本文算法, 在 Microsoft Visual Studio 2015 平台上进行实验, 所用计算机硬件环境为主频 2.8 GHz, 内存为 4 GB。采用一组随机例题和一个实际生产实例来验证本文算法的有效性。

4.1 随机例题

随机生成 30 道例题, 矩形件长度在 50 ~ 100 mm 范围内均匀分布, 矩形件宽度在 20 ~ 80 mm 范围内均匀分布, 矩形件需求量在 5000 ~ 20000 个范围内均匀分布, 剪切机的剪刀长度为 1500 mm; 前 10 道例题卷材宽度为 900 mm, 中间 10 道例题卷

材宽度为 1000 mm, 最后 10 道例题卷材宽度为 1100 mm。目前, 生产中经常采用普通算法, 即矩形件在卷材中全部水平排放或全部竖直排放, 选择材料利用率最大的一种排放方式作为最优解。注意到, 文献 [10] 和文献 [11] 的多矩形件卷材套裁下料算法, 在矩形件只有一种时, 其退化为普通算法。表 1 给出了本文算法和普通算法分别得到的下料方案所使用卷材的长度和卷材的利用率。本文算法下料方案的卷材平均利用率为 99.20%, 普通算法下料方案的卷材平均利用率为 97.03%, 本文算法卷材利用率较普通算法提高 2.17%。

表 1 30 道例题的实验结果

Table 1 Experimental results of 30 instances

题号	矩形件 尺寸/数量/ (mm×mm)/个	卷材 宽度/ mm	普通算法		本文算法	
			用卷材长 度/mm	利用率/ %	用卷材长 度/mm	利用率/ %
1	58×23/11000	900	16414	99.33	16366	99.62
2	63×27/11000	900	21042	98.80	20886	99.54
3	69×32/12000	900	29568	99.57	29485	99.85
4	65×57/12000	900	52000	95.00	49753	99.29
5	58×51/10000	900	34017	96.62	33146	99.16
6	77×63/10000	900	55055	97.90	54427	99.03
7	79×58/13000	900	68493	96.63	67425	98.16
8	82×43/13000	900	53300	95.56	51469	98.96
9	71×54/14000	900	62125	96.00	60401	98.74
10	76×61/14000	900	76000	94.89	72860	98.98
11	68×42/15000	1000	44404	96.48	43182	99.21
12	65×53/15000	1000	53000	97.50	52013	99.35
13	79×67/16000	1000	89378	94.75	85394	99.17
14	85×43/16000	1000	59160	98.85	58667	99.68
15	75×47/17000	1000	60750	98.64	60213	99.52
16	88×57/17000	1000	88000	96.90	85994	99.16
17	84×47/18000	1000	72072	98.60	71442	99.47
18	91×53/18000	1000	91000	95.40	87452	99.27
19	95×65/19000	1000	120365	97.47	118135	99.31
20	68×56/19000	1000	76024	95.17	73039	99.06
21	58×43/20000	1100	46400	97.73	45722	99.18
22	65×49/20000	1100	59150	97.90	58293	99.34
23	74×56/21000	1100	81844	96.66	79572	99.42
24	98×70/21000	1100	133700	97.95	132229	99.04
25	95×65/22000	1100	130000	95.00	125304	98.56
26	85×62/22000	1100	110075	95.75	106515	98.95
27	81×53/23000	1100	93150	96.36	90538	99.14
28	78×43/23000	1100	70649	99.26	70323	99.72
29	98×76/24000	1100	165832	97.99	164090	99.03
30	92×46/24000	1100	96048	96.13	93113	99.16

4.2 实际生产实例

某金属制品厂需要将宽度为 1000 mm 的卷材切割出 13000 个尺寸为 67 mm×29 mm 的矩形件, 剪切机剪刀长度为 1500 mm。普通算法求得的下料方案, 使用卷材长度为 25661 mm, 卷材利用率为 98.43%。本文算法求得的下料方案如图 4 所示, 使用 19 个长度为 1276 mm 的最优段和 1 个长度为 1045 mm 的剩余段, 使用卷材总长度为 25289 mm, 卷材利用率为 99.88%; 其中, 每个最优段中排放 656 个矩形件, 剩余段中排放 536 个矩形件。

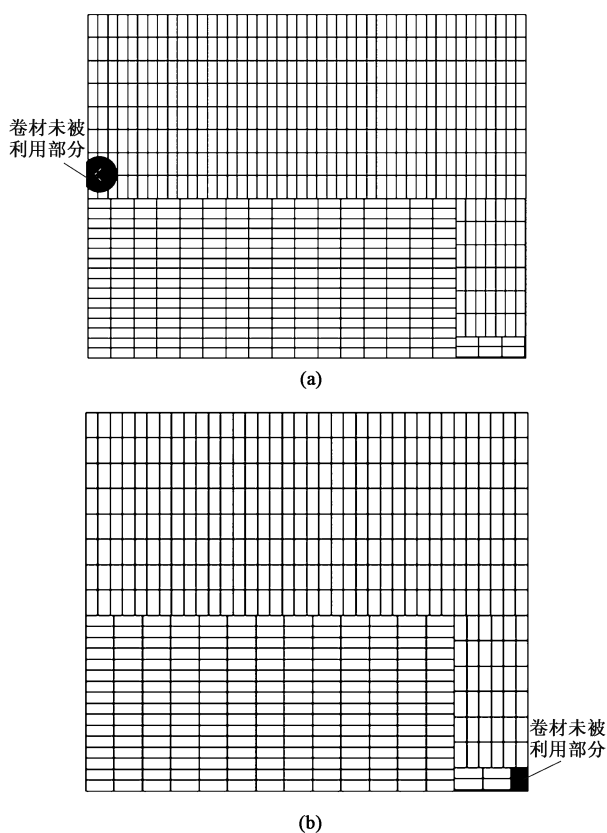


图4 本文算法的下料方案

(a) 最优段的多级排样方式 (b) 剩余段的多级排样方式

Fig. 4 Cutting schemes of algorithm for this paper

(a) Multi-stage layout method of optimal segment

(b) Multi-stage layout method of remaining segment

5 结语

针对单一矩形件卷材下料问题, 提出了一种基于隐式枚举法和动态规划算法的优化下料算法。首先, 采用隐式枚举法和动态规划算法确定每个段中矩形件的最优多级排样方式; 然后, 选择一个材料利用率最高的段来满足矩形件的绝大部分需求量, 按照该段使用次数最大和不产生多余矩形件原则确

定该段的使用次数, 再选择一个长度最小的段来满足矩形件的剩余需求量, 组合这两种段形成下料方案。实验结果表明, 本文算法能提高卷材的利用率。该算法可为相关下料企业设计单一矩形件卷材下料软件提供一定的参考。

参考文献:

- [1] Delorme M, Iori M. Enhanced pseudo-polynomial formulations for bin packing and cutting stock problems [J]. *Inform Journal on Computing*, 2020, 32 (1): 101-119.
- [2] Furini F, Malaguti E, Thomopulos D. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming [J]. *Inform Journal on Computing*, 2016, 28 (4): 736-751.
- [3] Mellouli A, Mellouli R, Masmoudi F. An innovative genetic algorithm for a multi-objective optimization of two-dimensional cutting-stock problem [J]. *Applied Artificial Intelligence*, 2019, 33 (6): 531-547.
- [4] Clautiaux F, Sadykov R, Vanderbeck F, et al. Pattern-based diving heuristics for a two-dimensional guillotine cutting-stock problem with leftovers [J]. *EURO Journal on Computational Optimization*, 2019, 7 (3): 265-297.
- [5] Sumethapiwat S, Intiyot B, Jeenanunta C. A column generation on two-dimensional cutting stock problem with fixed-size usable leftover and multiple stock sizes [J]. *International Journal of Logistics Systems and Management*, 2020, 35 (2): 273-288.
- [6] Velasco A S, Uchoa E. Improved state space relaxation for constrained two-dimensional guillotine cutting problems [J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 272 (1): 106-120.
- [7] Cui Y D. Dynamic programming algorithms for the optimal cutting of equal rectangles [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2005, 29 (11): 1040-1053.
- [8] 郭俐, 崔耀东. 有约束单一尺寸矩形毛坯最优排样的拼合算法 [J]. *农业机械学报*, 2007, 38 (10): 140-144.
Guo L, Cui Y D. Joining method for generating constrained cutting patterns for rectangles of a single size [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2007, 38 (10): 140-144.
- [9] Cui Y D, Gu T L, Hu W. Recursive algorithms for the optimum cutting of equal rectangles [J]. *International Journal of Computers & Applications*, 2011, 33 (2): 103-107.
- [10] Cui Y D, Huang L, He D. Generating optimal multiple-segment cutting patterns for rectangular blanks [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 2005, 218 (11): 1483-1490.
- [11] 朱强, 薛峰, 李碧青. 硅钢卷材二维剪切下料问题的一种求解算法 [J]. *变压器*, 2018, 55 (3): 18-20.
Zhu Q, Xue F, Li B Q. An algorithm for 2D guillotine cutting stock problem of silicon steel coil [J]. *Transformer*, 2018, 55 (3): 18-20.
- [12] Birgin E G, Lobato R D, Morabito R. Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2012, 63 (2): 183-200.