

## 可减少排样方式数的二维下料顺序启发式算法

谢东刚<sup>1</sup>, 吕 连<sup>1</sup>, 邓国斌<sup>1</sup>, 唐伟萍<sup>2</sup>

(1. 广西工业职业技术学院 通识教育学院, 广西 南宁 530001; 2. 广西电力职业技术学院 汽车与交通工程学院, 广西 南宁 530007)

**摘要:** 讨论矩形件二维下料问题, 将板材成本最小作为主要优化目标, 将排样方式数最少作为辅助优化目标。提出一种可减少排样方式数的下料算法。该算法基于顺序启发式框架, 按顺序逐个产生排样方式满足剩余矩形件的部分需求量, 直到矩形件的所有需求量均得到满足为止。它采用一种分组技术选择可用来生成下一个排样方式的矩形件, 用这些矩形件生成下一个排样方式后根据顺序价值校正方法调整矩形件的价值, 其中每个排样方式均采用动态规划程序生成。将本文下料算法与两种文献算法进行对比, 实验结果表明, 本文下料算法使用的板材面积比文献算法分别节省了 1.12% 和 0.89%, 排样方式数比文献算法分别减少了 45.56% 和 30.79%, 且计算时间与文献算法接近。

**关键词:** 二维下料问题; 顺序启发式算法; 价值校正; 排样方式数; 分组技术

**DOI:** 10.13330/j.issn.1000-3940.2022.04.013

**中图分类号:** TP391      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-3940 (2022) 04-0095-06

## Sequential heuristic algorithm of two-dimensional cutting stock with reducing number of patterns

Xie Donggang<sup>1</sup>, Lyu Lian<sup>1</sup>, Deng Guobin<sup>1</sup>, Tang Weiping<sup>2</sup>

(1. College of General Education, Guangxi Vocational & Technical Institute of Industry, Nanning 530001, China;

2. Department of Automotive and Traffic Engineering, Guangxi Electric Polytechnic Institute, Nanning 530007, China )

**Abstract:** The two-dimensional cutting stock problem of rectangular parts was discussed, and taking the minimum cost of sheet as the main optimization objective, taking the minimum number of patterns as the secondary optimization objective, a cutting stock algorithm that could reduce the number of patterns was proposed. Then, based on the sequential heuristic framework, the algorithm generated pattern one by one in order to meet the part requirements of the remaining rectangular parts until all the requirements of the rectangular parts were met, and it used a grouping technique to select the rectangular parts that were used to generate the next pattern. Furthermore, after the next pattern was generated by the above rectangular parts, the value of rectangular parts was adjusted according to the sequential value correction method, and each pattern was generated by the dynamic programming program. Finally, the cutting stock algorithm in this paper was compared with the two literature algorithms. The experimental results show that the area of the sheet used by the cutting stock algorithm in this paper is 1.12% and 0.89% less than that of the literature algorithms respectively, and the number of patterns is reduced by 45.56% and 30.79% respectively. However, the calculation time is close to that of the literature algorithms.

**Key words:** two-dimensional cutting stock problem; sequential heuristic algorithm; value correction; number of patterns; grouping technique

二维下料问题 (Two-dimensional Cutting Stock Problem, 2DCSP) 是指采用同种规格的库存板材切割出一组指定尺寸和需求量的矩形件, 使得所用的板材张数最少。2DCSP 在文献 [1] 的切割排样分类中属于二维单一尺寸矩形原料下料问题。该问题

的解是一个下料方案, 它包含多个排样方式, 且指定按每个排样方式切割的板材张数。每个排样方式由其中包含的各种矩形件的个数确定。各种矩形件在排样方式中互不重叠, 且排样方式符合切割工艺要求。

在工业生产中需要按照实际背景确定二维下料问题的约束和目标<sup>[2-3]</sup>。虽然二维下料问题的主要优化目标是板材张数最小化, 但在某些应用背景下减少下料方案的排样方式数也是很有必要的。这是因为: (1) 每个排样方式经常对应切割过程的一个设置成本, 减少排样方式数可减少总设置成本; (2) 某些应用领域例如金属制品业, 相同排样方式

收稿日期: 2020-10-23; 修订日期: 2021-01-19

基金项目: 教育部新一代信息技术创新项目 (2020ITA03027)

作者简介: 谢东刚 (1983-), 男, 硕士, 讲师

E-mail: dgxgygx@163.com

通信作者: 唐伟萍 (1983-), 女, 学士, 副教授

E-mail: hxnz2002@126.com

的薄金属板材可以堆叠切割,减少排样方式数可以减少板材叠数从而降低切割成本。

讨论排样方式数减少的二维下料问题 (Two-dimensional Cutting Stock Problem with Pattern Reduction, 2DCSPPR): 用剪切工艺将尺寸为  $L \times W$  的库存板材切割出  $m$  种矩形件, 主要优化目标为所用的板材张数最少, 辅助优化目标为排样方式数最少, 两个优化目标按照优先级顺序进行考虑。第  $i$  种矩形件的长度、宽度、需求量分别为  $l_i$ 、 $w_i$  和  $d_i$ 。每种矩形件的方向固定, 即矩形件在板材中排样时不能旋转方向。设  $n$  为下料方案包含的排样方式个数,  $Z$  为下料方案使用的板材张数,  $\mathbf{N}^+$  为正整数集合,  $p_{ji}$  为第  $j$  个排样方式包含第  $i$  种矩形件的个数,  $x_j$  为按排样方式  $j$  切割的板材张数。2DCSPPR 的解可通过求式 (1) 所示的整数线性规划模型得到。

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{j=1}^n x_j \\ \min n \\ \text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n p_{ji} x_j = d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \mathbf{N}^+ \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

模型式 (1) 有两个目标函数: 第 1 个目标函数为主要优化目标, 为下料方案使用的板材张数最小化; 第 2 个目标函数为辅助优化目标, 为下料方案包含的排样方式数最小化。

目前, 针对二维下料问题主要有 3 种确定性求解方法: 第 1 种是线性规划方法<sup>[4-6]</sup>, 其中决策变量为按每种排样方式切割的板材张数; 第 2 种是整数规划方法<sup>[7-9]</sup>, 与线性规划的区别是限制决策变

量为整数; 第 3 种是顺序启发式方法<sup>[10-12]</sup>, 按顺序逐个生成排样方式形成下料方案, 这种方法因为可以考虑除板材成本之外的其他优化目标和约束条件, 目前应用最广。

本文针对 2DCSPPR 提出的基于条带占角排样方式的顺序启发式下料算法, 首先构造矩形件数量有约束的条带占角排样算法, 然后按顺序调用上述排样算法逐个生成排样方式来满足矩形件的部分需求量, 直到矩形件的所有需求量均得到满足为止。

## 1 排样算法

本文下料算法通过调用排样方式生成算法来获取下料方案中的各个排样方式。因为在得到下料方案之前需要产生大量的排样方式, 故排样方式生成算法的质量直接关系到下料算法的性能。

条带占角的排样方式: 将一根包含同种矩形件的条带排放在子板  $x \times y$  的左下角 (其中,  $x$  为子板的长度,  $y$  为子板的宽度), 然后将子板剩余部分用水平分割线或竖直分割线划分成 2 个新的子板待后续递归考察, 直到子板无法排入矩形件为止。

为了叙述的统一性, 规定板材和矩形件的水平边为长, 竖直边为宽。按照子板左下角条带的方向, 条带占角排样方式可分为 2 种, 即水平条带占角排样方式和竖直条带占角排样方式。如图 1 所示, 当子板  $x \times y$  ( $0 < x \leq L$ ,  $0 < y \leq W$ ) 的左下角排放水平条带时, 条带中可包含矩形件  $i$  的个数为  $0 \sim \min\{\lfloor x/l_i \rfloor, d_i\}$ 。如图 2 所示, 当子板  $x \times y$  的左下角排放竖直条带时, 条带中可包含矩形件  $i$  的个数为  $0 \sim \min\{\lfloor y/w_i \rfloor, d_i\}$ 。

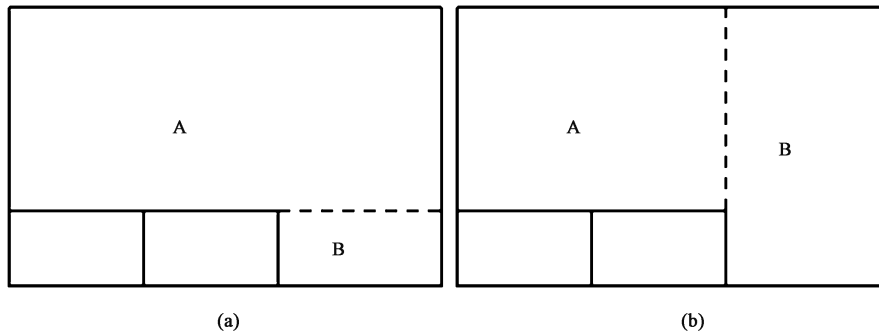


图 1 水平条带占角排样方式

(a) 排样方式  $P_{XH}^{ik}$  (b) 排样方式  $P_{XV}^{ik}$

Fig. 1 Horizontal strip corner-occupying pattern

(a) Pattern  $P_{XH}^{ik}$  (b) Pattern  $P_{XV}^{ik}$

当条带中矩形件的种类和个数确定后, 图 1 和图 2 中的 4 种排样方式:  $P_{XV}^{ik}$ 、 $P_{XH}^{ik}$ 、 $P_{YH}^{ik}$ 、 $P_{YV}^{ik}$  即被

确定, 其中, 上标  $ik$  表示子板左下角条带中包含  $k$  个矩形件  $i$ , 下标  $X$ 、 $Y$  分别表示子板左下角排放的

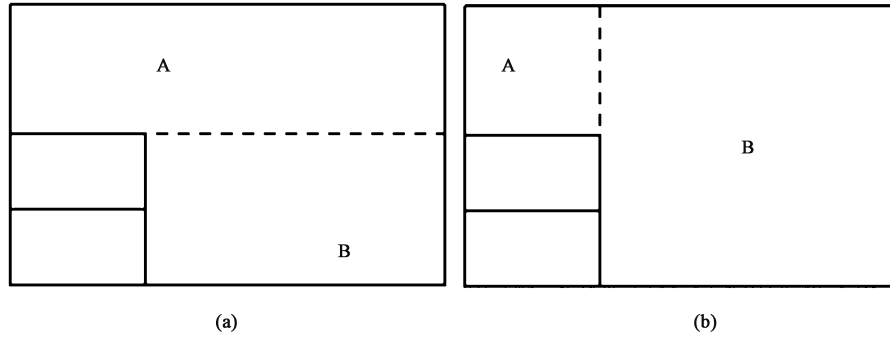


图2 竖直接带占角排样方式  
(a) 排样方式  $P_{YH}^{ik}$  (b) 排样方式  $P_{YV}^{ik}$

Fig. 2 Vertical strip corner-occupying pattern  
(a) Pattern  $P_{YH}^{ik}$  (b) Pattern  $P_{YV}^{ik}$

为水平条带或竖直接带，下标 H、V 分别表示子板剩余部分是用水平分割线划分或用竖直分割线划分。例如， $P_{XV}^{ik}$  表示子板左下角排放一根包含  $k$  个矩形件  $i$  的水平条带，子板剩余部分用水平分割线划分为两个新子板 A、B 待后续考察。

令  $I(x, y) = \{i \mid x \geq l_i, y \geq w_i, i \in \{1, \dots, m\}\}$ 。设  $F(x, y)$  为子板  $x \times y$  的价值，即包含的所有矩形件的价值之和。设  $V_{XH}^{ik}$ 、 $V_{XV}^{ik}$ 、 $V_{YH}^{ik}$ 、 $V_{YV}^{ik}$  分别为排样方式  $P_{XH}^{ik}$ 、 $P_{XV}^{ik}$ 、 $P_{YH}^{ik}$ 、 $P_{YV}^{ik}$  的价值。则有递归公式式 (2)：

$$\max \begin{cases} F(x-1, y), F(x, y-1) \\ V_{XH}^{ik}, V_{XV}^{ik} \mid i \in I(x, y), k \leq \min\{\lfloor x/l_i \rfloor, d_i\} \\ V_{YH}^{ik}, V_{YV}^{ik} \mid i \in I(x, y), k \leq \{\lfloor y/w_i \rfloor, d_i\} \end{cases} \quad (2)$$

式 (2) 表示初始时  $F(x, y)$  的值等于  $F(x-1, y)$  和  $F(x, y-1)$  的较大者，随后考察 4 种排样方式以提高子板的价值。

记  $n(x, y, i)$  为子板  $x \times y$  中包含的矩形件  $i$  的个数。设子板 A、B 的尺寸分别为  $x_A \times y_A$ 、 $x_B \times y_B$ 。在考察一个排样方式时，需要检查式 (3)、式 (4) 两个条件是否满足。

$$kv_i + F(x_A, y_A) + F(x_B, y_B) > F(x, y) \quad (3)$$

$$k + n(x_A, x_A, i) + n(x_B, x_B, i) \leq d_i \quad (4)$$

式中： $v_i$  为矩形件  $i$  的价值； $kv_i + F(x_A, y_A) + F(x_B, y_B)$  为排样方式的价值上界； $k + n(x_A, x_A, i) + n(x_B, x_B, i)$  为排样方式包含矩形件  $i$  的个数。

同时，满足式 (3) 和式 (4) 两个条件的排样方式被称为有潜力的排样方式。用函数 *ImprovePat* ( $x, y, x_A, y_A, x_B, y_B, r, i$ ) 改善有潜力的排样方式的价值，其中  $r$  为矩形件的编号。

图3 程序中  $b_r$  表示排样方式中包含第  $r$  种矩形件的个数； $V$  为排样方式的价值； $d_r$  为矩形件  $r$  的需求量。第1行计算排样方式包含每种矩形件的个数。第2~3行确定当前分支对应的排样方式的价值，如果当前分支能够改善排样方式的价值，则更新子板的排样价值。

```

1  令  $b_r = \min\{d_r, n(x_A, y_A, r) + n(x_B, y_B, r)\}$ ，当  $r \in \{1, \dots, m\}$  且  $r \neq i$ ；令  $b_r = \min\{d_r, n(x_A, y_A, r) + n(x_B, y_B, r)\} + k$ ，当  $r = i$ 
2  令  $V = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \dots + v_m b_m$ 。如果  $V \leq F(x, y)$  则跳过当前分支。
3  令  $F(x, y) = V$ 。令  $n(x, y, r) = b_r, r = 1, \dots, m$ 。

```

图3 程序段 *ImprovePat* ( $x, y, x_A, y_A, x_B, y_B, r, i$ )

Fig. 3 Program segment of *ImprovePat* ( $x, y, x_A, y_A, x_B, y_B, r, i$ )

依照式 (2) 构造本文条带占角排样方式的顺序启发式生成算法。算法的伪代码如图4所示，其中  $l_{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{l_i\}$ 、 $w_{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{w_i\}$ 。

图4 程序第1行初始化长度小于最小矩形件长度或宽度小于最小矩形件宽度的子板的价值为0，

这是因为此类板块无法容纳任何矩形件。第2~3行表示，按照由小到大顺序考察所有可能尺寸的子板。第4~5行表示，初始化子板  $x \times y$  的价值为子板  $(x-1) \times y$  和子板  $x \times (y-1)$  价值的较大者。第8~13行表示，考察4种可能的排样方式来改善当前解。

```

1  令  $F(x, y) = 0, n(x, y, r) = 0, r = 1, \dots, m. \quad x = 0, \dots, l_{\min} - 1, y = 0, \dots, w_{\min} - 1.$ 
2  For  $x = l_{\min}$  to  $L$ 
3    For  $y = w_{\min}$  to  $W$ 
4      如果  $F(x-1, y) \geq F(x, y-1)$ , 则令  $F(x, y) = F(x-1, y), n(x, y, r) = n(x-1, y, r)$ , 其中  $r = 1, \dots, m.$ 
5      否则, 令  $F(x, y) = F(x, y-1), n(x, y, r) = n(x, y-1, r).$ 
6      For  $i = 1$  to  $m$ 
7        如果  $x < l_i$  或  $y < w_i$ , 则不考虑矩形件  $i.$ 
8        For  $k = 1$  to  $\min\{\lfloor x/l_i \rfloor, d_i\}$ 
9          如果排样方式  $P_{\text{XH}}^{ik}$  有潜力, 则  $\text{ImprovePat}(x, y, x, y-w_i, x-kl_i, w_i, k, i).$ 
10         如果排样方式  $P_{\text{XV}}^{ik}$  有潜力, 则  $\text{ImprovePat}(x, y, kl_i, y-w_i, x-kl_i, y, k, i).$ 
11         For  $k = 1$  to  $\min\{\lfloor y/w_i \rfloor, d_i\}$ 
12           如果排样方式  $P_{\text{YH}}^{ik}$  有潜力, 则  $\text{ImprovePat}(x, y, x, y-kw_i, x-l_i, kw_i, k, i).$ 
13           如果排样方式  $P_{\text{YV}}^{ik}$  有潜力, 则  $\text{ImprovePat}(x, y, l_i, y-kw_i, x-l_i, y, k, i).$ 

```

图 4 条带占角排样方式的顺序启发式生成算法

Fig. 4 Sequential heuristic generation algorithm of strip corner-occupying pattern

## 2 下料算法

采用不同的参数产生多个下料方案, 选择最优的一个作为最终下料方案, 其中每个下料方案均由基础下料算法使用一组特定的参数生成。

### 2.1 基础下料算法

通过反复执行如下 3 个步骤直到所有矩形件的需求量均被满足为止, 以生成一个下料方案: (1) 选择部分剩余矩形件构成矩形件候选集; (2) 调用排样方式生成算法, 使用候选集中的矩形件生成当前排样方式, 确定按当前排样方式切割的板材张数, 通过删除被当前排样方式满足的矩形件来更新矩形件的剩余需求量; (3) 校正当前排样方式中矩形件的价值。下面来详细介绍这 3 个步骤。

步骤 1: 选择部分剩余矩形件构成矩形件候选集。采用候选集矩形件生成各个排样方式, 有利于减少下料方案的排样方式数<sup>[13]</sup>。采用文献 [13] 的候选集选择算法确定矩形件候选集。算法用到的参数如表 1 所示。

表 1 候选集选择算法用到的符号

符号	含义
$U$	剩余矩形件集合, $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ , 初始时 $U = \{d_1, \dots, d_m\}$ , 其中 $u_i$ 为第 $i$ 种矩形件的剩余需求量
$C$	候选矩形件集合, $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , 其中 $c_i$ 为候选矩形件集合中第 $i$ 种矩形件的个数
$\eta$	候选矩形件集合包含的矩形件最少种数
$\beta$	候选矩形件总面积不小于板材面积的 $\beta$ 倍
$n_c$	当前候选矩形件集合包含的矩形件的种数
$S_c$	当前候选矩形件集合包含的矩形件的总面积

令  $a_0 = \min\{u_i/c_i \mid c_i > 0\}$ , 假设使用候选集矩形件已经生成了一个排样方式, 则按该排样方式切割  $a_0$  张板材而不产生多余矩形件。图 5 给出了候选集矩形件选择算法的伪代码。

```

1  令  $a_{\max} = \max\{u_i\}.$ 
2  For  $a = a_{\max}$  down to 1
3    令  $n_c = S_c = 0.$ 
4    For  $i = 1$  to  $m$ 
5      令  $c_i = \lfloor u_i/a \rfloor.$  如果  $c_i > 0$ , 则
6         $n_c = n_c + 1, S_c = S_c + c_i l_i w_i.$ 
7      如果  $n_c \geq \eta$  且  $S_c \geq \beta LW$ , 则  $a_0 = a$ , 跳出当前程序.
8  令  $C = U, a_0 = 1.$ 

```

图 5 矩形件候选集选择算法

Fig. 5 Selection algorithm of rectangular part candidate set

步骤 2: 产生当前排样方式, 更新剩余矩形件的需求量。调用第 2 节的排样算法, 使用候选集矩形件生成一个排样方式  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ , 这里  $p_i = n(L, W, i)$ , 表示子板  $L \times W$  (板材) 排样方式中矩形件  $i$  的个数。按照该排样方式切割  $f = \min\{u_i/p_i \mid p_i > 0\}$  张板材。矩形件剩余需求量被更新为  $u_i = u_i - p_i f, i = 1, \dots, m$ 。

步骤 3: 校正当前排样方式中矩形件的价值。如果矩形件  $i$  在当前排样方式中的个数不为 0, 则采用式 (5) 校正该矩形件的价值。

$$\begin{cases} g_2 = \varepsilon p_i / (d_i + u_i) \\ g_1 = 1 - g_2 \\ U_p = (\sum_{q=1}^m p_q s_q) / (LW) \\ v_i = g_1 v_i + g_2 s_i^\alpha / U_p \end{cases} \quad (5)$$



式中： $g_1$ 、 $g_2$  为两个在区间  $[0, 1]$  取值的参数； $p_q$  为子板  $L \times W$ （板材）排样方式中矩形件  $q$  的个数； $s_q$  为矩形件  $q$  的面积； $s_i$  为矩形件  $i$  的面积； $\varepsilon$  为取值在区间  $[0.6, 0.9]$  的参数； $\alpha$  为略大于 1 的参数； $U_p$  为当前排样方式的板材利用率。

从式（5）可看出，当  $p_i=0$  时， $g_2=0$ ， $g_1=1$ ，这说明只校正当前排样方式中的矩形件的价值。 $g_2 s_i^\alpha / U_p$  表明，在校正矩形件价值时：（1）面积大的矩形件，价值提高得较多；（2）板材利用率低的排样方式中的矩形件的价值提高得较多。这是因为：面积大的矩形件比较难排样，需要提高其价值使其具有较高的排样优先权；排样方式的板材利用率低说明排样方式中矩形件组合得不够好，需要提高这些矩形件的价值，提升其排样优先权。

## 2.2 改进的下料算法

令最优下料方案使用的板材张数和包含的排样方式数分别为  $Z_0$ 、 $N_0$ ； $Z$ 、 $N$  为当前下料方案对应的板材张数和排样方式数。初始时令  $Z=+\infty$ 。图 6 为改进的下料算法的伪代码，参数  $\eta$  和  $\beta$  用来确定矩形件候选集。算法中  $\eta_{\min} = \min\{3, m\}$ ， $\eta_{\max} = \max\{15, m\}$ ， $\beta_{\min} = \min\{2, \mu\}$ ， $\beta_{\max} = \min\{6, \mu\}$ ，其中  $\mu = \sum_{i=1}^m l_i w_i d_i / (LW)$ ，为下料方案所用板材张数的理论下界。 $\lambda_{\max} = \lceil 2000 / [(\eta_{\max} - \eta_{\min} + 1)(\beta_{\max} - \beta_{\min} + 1)] \rceil$ ，表示每个  $(\eta, \beta)$  组合生成的下料方案的个数，它表明改进的下料算法总共考察的下料方案个数大于且接近于 2000。

```

1  For  $\eta = \eta_{\min}$  to  $\eta_{\max}$  step 1
2    For  $\beta = \beta_{\min}$  to  $\beta_{\max}$  step 1
3      For  $\lambda = 1$  to  $\lambda_{\max}$  step 1
4        令  $u_i = d_i$ ，其中  $i = 1, \dots, m$ .
5        调用 3.1 节基础下料算法生成当前下料方案.
6        如果  $Z < Z_0$  或  $(Z = Z_0$  且  $N < N_0)$  则
7          记当前下料方案为最优下料方案.
8      输出最优下料方案.

```

图 6 改进的下料算法的伪代码

Fig. 6 Pseudo code of improved cutting stock algorithm

## 3 实验计算

采用 Visual Studio 2015 开发平台，用 C++ 编程语言实现本文算法，在主频为 3.1 GHz，内存为 4 GB 的计算机上进行实验。设置参数  $\alpha = 1.02$ ， $\varepsilon =$

0.75。

## 3.1 文献例题

采用文献 [14] 的 15 道例题，每道例题包含 30 种矩形件，例题编号根据如下两个参数确定。（1）矩形件需求量： $S$ （小规模）类型的例题每种矩形件的需求量  $d_i \in [1, 25]$ ， $L$ （大规模）类型的例题的  $d_i \in [100, 200]$ ， $V$ （可变）类型的例题的  $d_i \in [1, 25]$  或  $d_i \in [100, 200]$ 。（2）板材尺寸：共有 5 种板材尺寸，类型  $\alpha'$ 、 $\beta'$ 、 $\chi'$ 、 $\delta'$  和  $\varepsilon'$  分别对应 1400 mm  $\times$  700 mm、1700 mm  $\times$  850 mm、2000 mm  $\times$  1000 mm、2800 mm  $\times$  1400 mm、4000 mm  $\times$  2000 mm。 $\alpha'$  类型的板材是最小的，单张板材平均可以排放 6 个矩形件； $\varepsilon'$  类型的板材是最大的，单张板材平均可以排放 50 个矩形件。

采用本文算法、文献 [6] 算法和文献 [12] 算法分别求解上述 15 道例题，本文算法、文献 [6] 算法、文献 [12] 算法平均每道例题分别耗时 4.97、4.29 和 5.16 s，可见本文算法计算时间与文献算法比较接近。表 2 为实验结果，其中  $Z_1$ 、 $Z_2$  分别表示文献 [6] 和文献 [12] 算法下料方案耗费的板材张数， $N_1$ 、 $N_2$  分别表示文献 [6] 和文献 [12] 算法下料方案的排样方式数。从表 2 可以看出，对于 15 道例题，本文算法、文献 [6] 算法、文献 [12] 算法下料方案总共耗费板材面积分别为 7425920000、7509920000 和 7493270000 mm<sup>2</sup>；下料方案包含的排样方式总个数分别为 245、450、354。

表 2 实验结果

Table 2 Experimental results

题号	$Z_0$	$N_0$	$Z_1$	$N_1$	$Z_2$	$N_2$
$S_{\alpha'}$	74	17	75	30	75	22
$S_{\beta'}$	46	16	47	30	46	21
$S_{\chi'}$	33	9	34	30	33	25
$S_{\delta'}$	17	8	18	30	18	26
$S_{\varepsilon'}$	8	6	9	30	9	19
$L_{\alpha'}$	1244	22	1249	30	1246	26
$L_{\beta'}$	607	21	610	30	608	23
$L_{\chi'}$	417	27	420	30	419	28
$L_{\delta'}$	210	16	216	30	215	21
$L_{\varepsilon'}$	103	10	105	30	105	13
$V_{\alpha'}$	557	29	558	30	557	29
$V_{\beta'}$	359	27	359	30	360	28
$V_{\chi'}$	245	23	245	30	246	26
$V_{\delta'}$	122	14	123	30	122	28
$V_{\varepsilon'}$	60	9	61	30	61	19

可见本文算法的下料方案比文献 [6] 算法和文献 [12] 算法分别节省板材 1.12% 和 0.90%; 下料方案排样方式数比文献 [6] 算法和文献 [12] 算法分别减少了 45.56% 和 30.79%。

### 3.2 生产实例

某金属制品企业需要用尺寸为 2440 mm × 1220 mm 的板材切割出 18 种矩形件, 每种矩形件的尺寸和需求量如图 7 所示, 例如 “369×266×13288” 表示该种矩形件的尺寸为 369 mm×266 mm, 需求量为 13288 个。本文算法、文献 [6] 算法、文献 [12] 算法求解该实例分别耗时 5.92、5.71 和 6.59 s。文献 [6] 算法下料方案板材利用率为 97.31%, 排样方式个数为 18。文献 [12] 算法下料方案板材利用率为 97.76%, 排样方式个数为 16。本文算法下料方案板材利用率为 98.34%, 排样方式数为 11。可见, 本文下料算法在提高板材利用率和减少排样方式数两个方面均有效。

369×266×13288, 507×156×5432, 202×477×8568, 433×  
547×9637, 382×306×3937, 380×245×8208, 271×233×  
9306, 205×163×9512, 411×278×5214, 337×327×18188,  
594×258×2400, 345×265×14753, 582×505×8039, 265×  
257×18677, 518×543×8217, 178×200×5920, 233×255×  
12294, 519×181×4845

图 7 实例的矩形件数据

Fig. 7 Data of rectangular parts for instance

## 4 结语

针对矩形件二维下料问题, 提出了一种可减少排样方式数的顺序启发式下料算法, 首先, 采用条带占角排样算法生成单张板材上矩形件数量有约束的排样方式, 然后, 采用顺序价值校正算法调用条带占角排样算法生成下料方案, 使用候选集矩形件概念减少下料方案的排样方式数。实验结果表明, 所提算法在节省板材和减少排样方式数两个方面均有效。今后可将本文条带占角排样算法与列生成算法相结合求解多规格板材下料问题。

### 参考文献:

- [1] Wäscher G, Haußner H, Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183 (3): 1109–1130.
- [2] 刘添乐, 马云龙, 黄嘉蕾, 等. 新型超高强铝锂合金厚板厚度方向组织及性能的不均匀性 [J]. *稀有金属*, 2020, 44 (8): 785–791.

Liu T L, Ma Y L, Huang J L, et al. Through-thickness inhomoge-

neity of structures and tensile property in a novel super-high strength Al-Li alloy thick plate [J]. *Chinese Journal of Rare Metals*, 2020, 44 (8): 785–791.

- [3] Erjavec J, Gradisar M, Trkman P. Assessment of stock size to minimize cutting stock production costs [J]. *International Journal of Production Economics*, 2012, 135 (1): 170–176.
- [4] Cui Y, Zhao Z. Heuristic for the rectangular two-dimensional single stock size cutting stock problem with two-staged patterns [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 231 (2): 288–298.
- [5] 黎凤洁, 崔耀东, 陈秋莲. 面向可加工性的卷材优化下料方法 [J]. *锻压技术*, 2020, 45 (2): 67–72.
- Li F J, Cui Y D, Chen Q L. Optimized cutting method of coil for processability [J]. *Forging & Stamping Technology*, 2020, 45 (2): 67–72.
- [6] 曾兆敏, 王继红, 管卫利. 二维板材切割下料问题的一种确定性算法 [J]. *图学学报*, 2016, 37 (4): 471–475.
- Zeng Z M, Wang J H, Guan W L. A deterministic algorithm for solving the problem of two-dimensional sheet cutting stock an algorithm of the constrained two-dimensional nesting [J]. *Journal of Graphics*, 2016, 37 (4): 471–475.
- [7] Silva E, Alvelos F, Carvalho J M V D. An integer programming model for two- and three-stage two-dimensional cutting stock problems [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 205 (3): 699–708.
- [8] Furini F, Malaguti E. Models for the two-dimensional two-stage cutting stock problem with multiple stock size [J]. *Computers & Operations Research*, 2013, 40 (8): 1953–1962.
- [9] Furini F, Malaguti E, Thomopulos D. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming [J]. *Informatics Journal on Computing*, 2016, 28 (4): 736–751.
- [10] 黄少丽, 杨剑, 侯桂玉, 等. 解决二维下料问题的顺序启发式算法 [J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47 (13): 234–237.
- Huang S L, Yang J, Hou G Y, et al. Sequential heuristic algorithm for two-dimensional cutting stock problem [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2011, 47 (13): 234–237.
- [11] Chen Q, Cui Y, Chen Y. Sequential value correction heuristic for the two-dimensional cutting stock problem with three-staged homogenous patterns [J]. *Optimization Methods and Software*, 2016, 31 (1): 68–87.
- [12] 许雁杰, 陈秋莲, 陈燕, 等. 二维下料问题的顺序按叠分组启发式算法 [J]. *锻压技术*, 2020, 45 (9): 45–50.
- Xu Y J, Chen Q L, Chen Y, et al. Sequential stacking grouping heuristic algorithms of two-dimensional cutting stock problem [J]. *Forging & Stamping Technology*, 2020, 45 (9): 45–50.
- [13] Cui Y, Liu Z. C-sets-based sequential heuristic procedure for the one-dimensional cutting stock problem with pattern reduction [J]. *Optimization Methods & Software*, 2011, 26 (1): 155–167.
- [14] Imahori S, Yagiura M, Adachi S, et al. Local search algorithms for the two-dimensional cutting stock problem with a given number of different patterns [J]. *Operations Research Computer Interfaces Series*, 2005, 32 (1): 181–202.