

液压缸驱动下叶片辊轧机传动系统动力学特性

张 瑜^{1,2}, 侯绿原¹, 赵 飞¹

(1. 安阳工学院 机械工程学院, 河南 安阳 455000;

2. 安阳工学院 安阳市先进航空材料与加工技术重点实验室, 河南 安阳 455000)

摘要: 为了分析液压缸非线性动力学特性对叶片辊轧机传动系统振动的影响, 建立了液压缸与叶片辊轧机传动系统耦合振动模型, 考虑载荷作用下齿条基体产生弹性变形, 推导出上轧辊二级齿轮-齿条时变啮合刚度, 采用 Runge-Kutta 法求得了系统动力学特性, 研究了无杆腔的初始有效长度、齿轮-齿条啮合刚度等参数对辊轧机传动系统的动力学特性的影响。分析表明, 无杆腔的初始有效长度的增加, 使系统逐步由周期运动进入倍周期运动, 最终转为混沌运动; 此外, 齿轮-齿条啮合刚度引起上轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮-齿条的振动位移在初始时刻产生一定的波动, 而对下轧辊一级齿轮的运动状态影响较小。

关键词: 辊轧机; 叶片; 液压缸; 传动系统; 啮合刚度

DOI: 10.13330/j.issn.1000-3940.2023.09.020

中图分类号: TG339

文献标志码: A

文章编号: 1000-3940 (2023) 09-0156-12

Dynamic characteristics of blade rolling mill transmission system driven by hydraulic cylinder

Zhang Yu^{1,2}, Hou Lyuyuan¹, Zhao Fei¹

(1. School of Mechanical Engineering, Anyang Institute of Technology, Anyang 455000, China;

2. Anyang Key Laboratory of Advanced Aeronautical Materials and Processing Technology, Anyang Institute of Technology, Anyang 455000, China)

Abstract: In order to analyze the influence of nonlinear dynamic characteristics for hydraulic cylinders on the vibration of transmission system for blade rolling mill, the coupled vibration model of hydraulic cylinder and transmission system for blade rolling mill was established. Considering the elastic deformation of rack matrix under load effect, the time-varying meshing stiffness of secondary gear-rack for upper roll was derived. The Runge-Kutta method was used to obtain the dynamic characteristics of system. The effect of parameters such as initial effective length of rodless cavity and meshing stiffness of gear-rack on the dynamic characteristics of transmission system for rolling mill were studied. The results show that the increasing of the initial effective length of rodless cavity causes the system to gradually move from periodic motion to multiplier motion, and eventually to chaotic motion. Besides, the meshing stiffness of gear-rack causes the fluctuation for vibration displacement of primary gear and secondary gear-rack of upper roll at the initial moment, and has less effect on the movement state of primary gear of lower roll.

Key words: rolling mill; blade; hydraulic cylinder; transmission system; meshing stiffness

叶片辊轧机传动系统作为动力传递机构, 其运动精度以及高动态性能决定着叶片的加工质量, 齿轮齿条作为叶片夹具的驱动机构, 其时变啮合刚度的存在使得系统产生非线性振动。此外, 液压缸作为系统驱动元件, 在低速运行时表现的弱非线性存

在不同程度的波动, 降低了辊轧机传动系统高精度位置控制的稳定性和可靠性^[1]。因此, 分析上述因素对辊轧机传动系统动力学特性的影响规律, 对叶片辊轧机的振动抑制具有重要意义。

针对辊轧机传动系统动力学特性的分析, 目前国内外学者已经做了诸多研究工作^[2-5]。曾令强等^[6]建立了动态轧制过程与板带辊轧机传动系统结构相耦合的垂直-水平-扭转以及轧件水平颤振的耦合振动模型, 通过分析获得了辊轧机传动系统结构和轧制过程的耦合关系。刘晓潺等^[7]建立了连辊轧机多方向振动耦合的再生颤振系统模型, 基于劳斯

收稿日期: 2022-12-15; **修订日期:** 2023-03-26

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目 (22A460007); 2022 年河南省重点研发与推广专项 (222102220020); 2022 安阳市科技特派员

作者简介: 张 瑜 (1987-), 男, 博士, 讲师

E-mail: z13464238735@sina.com

判据和积分值检验法对冷连轧机再生颤振系统的稳定性进行了研究。王桥医等^[8]建立了综合考虑轧制力波动、界面摩擦等因素的四辊铝带冷轧机系统六自由度动力学模型，对辊轧机传动系统进行了时域和频域振动特性研究。张阳等^[9]综合考虑辊轧机传动系统沿垂直、水平和轴线方向的弯曲变形之间的耦合效应，建立了板带轧机辊系刚柔耦合动力学模型，对轧机辊系进行耦合运动模态分析。吴继民等^[10]建立了考虑轧制力矩和电磁力矩双源作用下的辊轧机传动系统两自由度非线性动力学模型，采用平均法研究了辊轧机传动系统非线性动力学特性。郭志强等^[11]采用有限元方法研究了多间隙轧机主传动系统动态特性。侯东晓等^[12]建立了四辊轧机垂直-扭转耦合非线性振动动力学模型，采用多尺度法研究了动态轧制力、外扰力矩等参数对轧机垂直振动和扭转振动特性的影响。刘彬等^[13]建立了考虑液压缸非线性刚度作用下的轧机辊系垂直动力学模型，利用平均法研究了系统振动特性。高崇一等^[14]基于 ANSYS 有限元方法，对辊轧机主传动系统的扭振及结构失效进行了分析。

在叶片辊轧机结构中，液压缸驱动系统及齿轮齿条时变啮合特性对于轧机传动系统的振动影响不可忽略，将液压系统的非线性与辊轧机传动系统振动进行耦合，才能更接近辊轧机的实际工作状态。因此，本文建立液压缸与叶片辊轧机传动系统耦合振动模型，综合液压系统以及齿轮-齿条时变啮合刚度等因素的影响，研究叶片辊轧机传动系统的动力学特性，为进一步抑制辊轧机振动提供了理论依据。

1 辊轧机传动系统工作原理

图 1 为叶片辊轧机传动系统结构示意图，图 1 中液压缸驱动牵引框架沿 X 轴方向移动，从而带动上轧辊一级齿轮与下轧辊一级齿轮啮合转动并水平移动，同时，上轧辊二级齿轮与上轧辊二级齿条啮合转动，并带动上轧辊二级齿条水平移动，从而推动叶片夹具移动^[15]，最终完成叶片轧制。

2 液压缸动力学模型

本文主要考虑双作用单活塞液压缸，其工作简图如图 2 所示，无杆腔处的压力为 P_1 、有效作用面积为 A_1 ，有杆腔处的压力为 P_2 、有效作用面积为 A_2 ， m 为负载等效质量， F_L 为液压缸所受外负载，

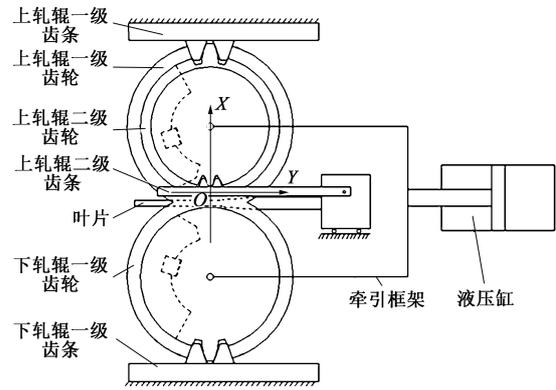


图 1 辊轧机传动系统结构示意图

Fig. 1 Structural schematic diagram of transmission system for rolling mill

动力学方程为：

$$m\ddot{s} = P_1A_1 - P_2A_2 - F_t - F_c - F_d - F_L \quad (1)$$

式中： s 为活塞杆移动位移； F_t 为弹性力， $F_t = k(s) [s - (x_5 + x_6)]$ ； x_5 为克服活塞静摩擦力时液压弹簧压缩量； x_6 为克服外负载 F_L 时液压弹簧的压缩量； $k(s)$ 为液压弹簧刚度，因活塞往复移动导致液压弹簧长度发生改变，使得液压弹簧刚度具有时变特性，表示为 $k(s) = \frac{\beta_e A_1^2}{A_1 S + V_{11}} + \frac{\beta_e A_2^2}{A_2 (L' - S) + V_{21}}$ ； β_e

为液压油的体积模量； S 为无杆腔长， $S = L_1 - s$ ； L_1 为无杆腔的初始有效长度； L' 为液压缸工作行程； V_{11} 、 V_{21} 为进、出油口的液压油体积； F_c 为粘性阻尼力； F_d 为活塞杆非线性摩擦力， $F_d = \text{sign}(v) \times \left[F_k + (F_j - F_k) \exp\left(-\left|\frac{v}{v_s}\right|\right)^\tau \right] + \eta v$ ； v 为活塞杆移动速度； v_s 为临界 Stribeck 速度； η 为粘滞系数； τ 为活塞杆移动速度相对 Stribeck 速度的指数； F_j 为最大静摩擦力； F_k 为库伦摩擦力。

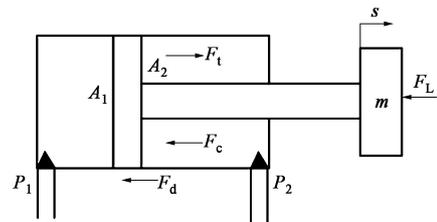


图 2 液压缸工作简图

Fig. 2 Working schematic diagram of hydraulic cylinder

3 动力学模型建立

为了分析液压缸的结构特性对辊轧机传动系统振动特性的影响，采用集中质量法建立液压缸与辊轧机传动系统耦合振动模型，如图 3 所示。图 3 中

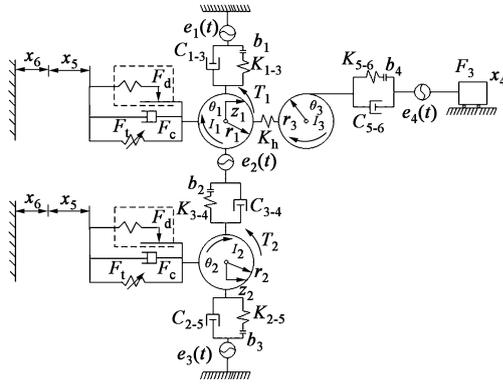


图 3 系统动力学模型

Fig. 3 System dynamics model

I_i ($i=1, 2, 3$) 分别为上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮的转动惯量; r_i ($i=1, 2, 3$) 为上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮的基圆半径。根据牛顿第二定律, 建立系统动力学方程, 如式 (2) 所示。

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + Q_{1-3} + P_{1-3} - Q_{3-4} - P_{3-4} = P_1 A_1 - P_2 A_2 - F_d - F_c - F_l - F_L \\ m_2 \ddot{z}_2 + Q_{2-5} + P_{2-5} - Q_{3-4} - P_{3-4} = P_1 A_1 - P_2 A_2 - F_d - F_c - F_l - F_L \\ m_1 \ddot{x}_1 - Q_{1-3} - P_{1-3} - Q_{3-4} - P_{3-4} + \frac{K_h}{r_1} \left(\frac{x_1}{r_1} - \frac{x_3}{r_3} \right) = -\frac{T_1}{r_1} \\ m_2 \ddot{x}_2 + P_{2-5} + Q_{3-4} + P_{3-4} + P_{2-5} = \frac{T_2}{r_2} \\ m_3 \ddot{x}_3 + P_{5-6} + Q_{5-6} - \frac{K_h}{r_3} \left(\frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \right) = 0 \\ m_4 \ddot{x}_4 - P_{5-6} + Q_{5-6} = -F_3 \end{cases} \quad (2)$$

式中: \ddot{x}_i, \dot{x}_i ($i=1, 2, 3$) 分别为上、下轧辊一级齿轮、上轧辊二级齿轮的运动加速度、速度; $x_i = r_i \theta_i$ ($i=1, 2, 3$) 分别为上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级传动齿轮的位移; $\ddot{x}_4, \dot{x}_4, x_4$ 为上轧辊二级齿条的加速度、速度、位移; θ_i 为对应齿轮扭转角度; $\ddot{z}_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_2, \dot{z}_2$ 分别为上、下轧辊一级齿轮的水平运动加速度、速度; m_i ($i=1, 2, 3$) 分别为上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮的质量, $m_i = I_i / r_i$ ($i=1, 2, 3$); m_4 为上轧辊二级齿条的质量; T_1 为上轧辊一级齿轮扭转力矩; T_2 为下轧辊一级齿轮扭转力矩; F_3 为叶片夹具摩擦力; K_h 为上轧辊一、二级齿轮之间连接轴的扭转等效刚度;

$Q_{\lambda-\delta}$ ($\lambda=1, 2, 3, 5, \delta=3, 4, 5, 6$) 为齿轮副之间的等效阻尼力, $Q_{1-3} = C_{1-3} [\dot{x}_1 - \dot{z}_1 - \dot{e}_1(t)]$, $Q_{2-5} = C_{2-5} [\dot{x}_2 - \dot{z}_2 - \dot{e}_3(t)]$, $Q_{3-4} = C_{3-4} [\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{z}_1 + \dot{z}_2 - \dot{e}_2(t) - \dot{x}_5 - \dot{x}_6]$, $Q_{5-6} = C_{5-6} [\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{z}_1 - \dot{e}_4(t) - \dot{x}_5 - \dot{x}_6]$; Q_{1-3}, C_{1-3} 为上轧辊一级齿条与上轧辊一级齿轮间的等效阻尼力、阻尼系数; Q_{3-4}, C_{3-4} 为上轧辊一级齿轮与下轧辊一级齿轮间的等效阻尼力、阻尼系数; Q_{2-5}, C_{2-5} 为下轧辊一级齿条与下轧辊一级齿轮间的等效阻尼力、阻尼系数; Q_{5-6}, C_{5-6} 为上轧辊二级齿轮与上轧辊二级齿条间的等效阻尼力、阻尼系数; $e_j(t)$ ($j=1, 2, 3, 4$) 为齿轮啮合综合误差, 其中, $e_1(t)$ 为上轧辊一级齿条与上轧辊一级齿轮间啮合误差; $e_2(t)$ 为上轧辊一级齿轮与下轧辊一级齿轮间啮合误差; $e_3(t)$ 为下轧辊一级齿条与下轧辊一级齿轮间啮合误差; $e_4(t)$ 为上轧辊二级齿轮与上轧辊二级齿条间啮合误差, $e_j(t) = e_j \times \sin(\omega_j t + \varphi_j)$; e_j 为齿轮副啮合综合误差的幅值; ω_j 为啮合频率; t 为啮合时间; φ_j 为相位角; $P_{\lambda-\delta}$ ($\lambda=1, 2, 3, 5; \delta=3, 4, 5, 6$) 为齿轮副间的啮合力, 其中, P_{1-3} 为上轧辊一级齿条与上轧辊一级齿轮间的啮合力, $P_{1-3} = K_{1-3} f(x_1 - z_1 - e_1(t), b_1)$; P_{3-4} 为上轧辊一级齿轮与下轧辊一级齿轮间的啮合力, $P_{3-4} = K_{3-4} f(x_1 - x_2 - z_1 + z_2 - e_2(t) - x_5 - x_6, b_2)$; P_{2-5} 为下轧辊一级齿条与下轧辊一级齿轮间的啮合力, $P_{2-5} = K_{2-5} f(\dot{x}_2 - \dot{z}_2 - \dot{e}_3(t), b_3)$; P_{5-6} 为上轧辊二级齿轮与上轧辊二级齿条间啮合力, $P_{5-6} = K_{5-6} \times f(x_3 - x_4 - z_1 - e_4(t) - x_5 - x_6, b_4)$; K_{1-3}, K_{2-5} 分别为上、下轧辊一级齿轮-齿条间的啮合刚度; K_{3-4} 为上轧辊一级齿轮-下轧辊一级齿轮间的啮合刚度; K_{5-6} 为上轧辊二级齿轮-齿条间的啮合刚度; b_1 为上轧辊一级齿条与上轧辊一级齿轮的间隙量; b_2 为上轧辊一级齿轮与下轧辊一级齿轮的间隙量; b_3 为下轧辊一级齿条与下轧辊一级齿轮的间隙量; b_4 为上轧辊二级齿轮与上轧辊二级齿条的间隙量; $f(s, b^*)$ 为间隙非线性函数, 可表示为:

$$f(s, b^*) = \begin{cases} s - b^* & (s > b^*) \\ 0 & (-b^* \leq s \leq b^*) \\ s + b^* & (s < -b^*) \end{cases} \quad (3)$$

式中: b^* 为齿轮副之间的间隙量。

为了保证系统动力学特性分析的准确性, 基于 ANSYS LS-DYNA 软件对叶片轧制过程进行仿真, 获得叶片轧制力, 采用 2D/Table curve 软件对仿真求得的轧制力进行拟合, 拟合曲线与仿真曲线对比如图 4 所示, 拟合公式为:

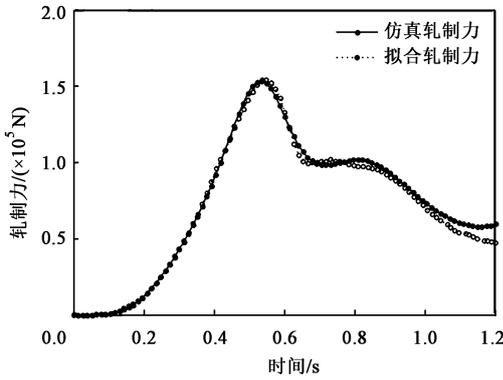


图4 轧制力拟合曲线

Fig. 4 Rolling force fitting curves

$$F_Z = (B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3 + B_5t^4 + B_6t^5 + B_7t^6 + B_8t^7 + B_9t^8 + B_{10}t^9 + B_{11}t^{10}) / (1 + B_{12}t + B_{13}t^2 + B_{14}t^3 + B_{15}t^4 + B_{16}t^5 + B_{17}t^6 + B_{18}t^7 + B_{19}t^8 + B_{20}t^9 + B_{21}t^{10}) \quad (4)$$

式中： F_Z 为辊轧机轧制力； $B_1 \sim B_{21}$ 为拟合系数，本文设定数值为 $B_1 = 25.455$, $B_2 = -14.735$, $B_3 = -3897.951$, $B_4 = 101.771$, $B_5 = 67462.113$, $B_6 = -411.897$, $B_7 = -42769.86$, $B_8 = 1058.436$, $B_9 = -941064.8$, $B_{10} = -1791.32$, $B_{11} = 3.17 \times 10^6$, $B_{12} = 2019.957$, $B_{13} = -4.56 \times 10^6$, $B_{14} = -1500.46$, $B_{15} = 3.41 \times 10^6$, $B_{16} = 704.265$, $B_{17} = -1.3 \times 10^6$, $B_{18} = -189.129$, $B_{19} = 201565.16$, $B_{20} = 22.132$, $B_{21} = 20.1$ 。

在式(4)的基础上，齿轮所受的扭转力矩 $T_1 = T_2 = F_Z \cdot d$ ，其中， d 为齿轮分度圆直径；系统所受外负载 $F_L = F_Z + \mu(F_Z + m)$ ，其中， μ 为轮齿间的摩擦因数。

4 二级齿轮-齿条啮合刚度

上轧辊二级齿条一端固定，一端悬臂与齿轮啮合，单纯考虑轮齿啮合刚度会降低计算精度。为此，本文综合考虑齿条基体形变，整体接触刚度表示为：

$$K_{5-6} = K_S + K_L \quad (5)$$

式中： K_S 为齿条基体刚度； K_L 为齿轮-齿条接触刚度。

为了获得齿条基体刚度，将其视为悬臂梁，如图5所示，齿条的几何结构由变截面矩形和矩形截面组成，将其分为两段进行分析。

4.1 变截面梯形梁变形分析

当变截面矩形 $aba'b'$ 段梁变形时，假设 $bc'b'c'$ 段梁刚化，受力变形如图6所示，图5中 L 为齿条总长， B 为齿条宽度， h 为齿条高度， l 为载荷 P 至齿条根部的距离， l_1 为齿条变截面长度。图6中， Δ_1

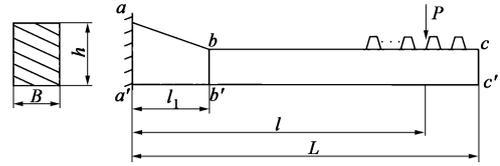


图5 变截面梯形梁变形结构简图

Fig. 5 Schematic diagram of deformation structure for trapezoid beam with variable section

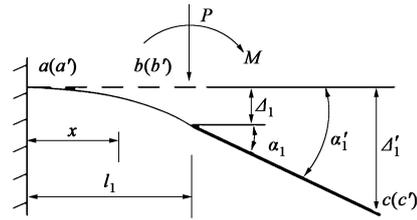


图6 变截面梯形梁变形受力图

Fig. 6 Deformation stress diagram of trapezoid beam with variable section

为 P 作用下 $aba'b'$ 段梁弯曲挠度； Δ_1' 为 P 作用下 $abcc'$ 段梁弯曲挠度； α_1 为 P 作用下 $aba'b'$ 段梁弯曲角度； α_1' 为 P 作用下 $abcc'$ 段梁弯曲角度。建立由载荷 P 作用下距离梁根部 x 处的挠曲线方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} = -\frac{P(l_1 - x)}{E \frac{B}{12} \left[\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right]^3} \quad (6)$$

式中： y 为垂直位移； $M(x)$ 为 $aba'b'$ 段梁的转矩； $I(x)$ 为梁转动惯量； E 为梁弹性模量； ξ 为梁截面系数。

采用逐次积分法，选取边界条件 $x=0$ 处， $\frac{dy}{dx} = 0$, $y=0$ ，得：

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -\frac{6Pl_1^2}{EBh(\xi - 1)} \left[\left(\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right)^{-2} + c_0 \right] + \\ & \frac{12Pl_1^2}{EBh^2(\xi - 1)^2} \left[\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right]^{-2} + \\ & c_2 + \frac{-6Pl_1^2}{EBh(\xi - 1)^2} \left[\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right]^{-2} \\ \Delta_1 = & \frac{6Pl_1^3}{EBh^2(\xi - 1)} \left[\frac{h(\xi - 1)}{l_1} + h \right]^{-1} + c_1x + c_2 + \\ & \frac{12Pl_1^3}{EBh^3(\xi - 1)^3} \ln \left(\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right) + \\ & \frac{6Pl_1^3}{EBh^2(\xi - 1)^3} \left[\frac{h(\xi - 1)}{l_1} x + h \right]^{-1} \quad (7) \end{aligned}$$

式中: c_0 、 c_1 、 c_2 为泰勒展开系数。

同理, 转矩 M 作用下的挠曲线方程为:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} = -\frac{P(l-l_1)(l_1-x)}{E \frac{B}{12} \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right]^3} \quad (8)$$

通过边界条件得挠度及弯曲角度为:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & -\frac{6P(l-l_1)l_1^2}{EBh(\xi-1)} \left[\left(\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right)^{-2} + c_0 \right] + \\ & \frac{12P(l-l_1)l_1^2}{EBh^2(\xi-1)^2} \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right]^{-2} + \\ & c_2 + \frac{-6P(l-l_1)l_1^2}{EBh(\xi-1)^2} \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right]^{-2} \\ \Delta_2 = & \frac{6P(l-l_1)l_1^3}{EBh^2(\xi-1)} \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right]^{-1} + c_1x + c_2 + \\ & \frac{12P(l-l_1)l_1^3}{EBh^3(\xi-1)^3} \ln \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right] + \\ & \frac{6P(l-l_1)l_1^3}{EBh^2(\xi-1)^3} \left[\frac{h(\xi-1)}{l_1}x + h \right]^{-1} \quad (9) \end{aligned}$$

式中: Δ_2 为 M 作用下 $aba'b'$ 段梁弯曲挠度; α_2 为 M 作用下 $aba'b'$ 段梁弯曲角度。

由 $aba'b'$ 段梁变形引起的 $bc'b'c'$ 段梁的变形量为:

$$\Delta'_1 = \Delta_1 + \alpha_1(l-l_1) \quad (10)$$

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \quad (11)$$

4.2 矩形梁变形分析

当 $bc'b'c'$ 段梁变形时, 设定 $aba'b'$ 段梁刚化, 将 bb' 端固定, 如图 7 和图 8 所示 (其中 Δ_3 为 $bc'b'c'$ 段梁弯曲挠度, α_3 为 $bc'b'c'$ 段梁弯曲角度), 此时距离梁根部 x 处的挠曲线方程为:

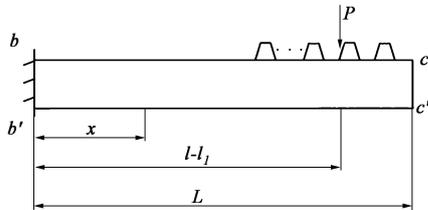


图 7 矩形梁结构简图

Fig. 7 Structural schematic diagram of rectangular beam

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P(l-l_1-x)}{E \frac{B}{12} (\xi h)^3} & (0 \leq x \leq l-l_1) \\ 0 & (l-l_1 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (12)$$

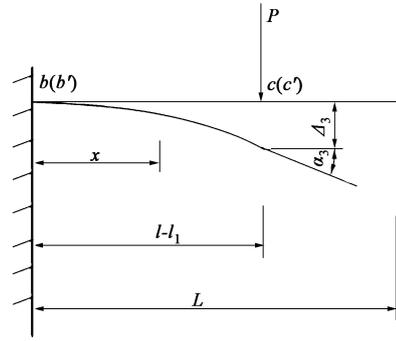


图 8 矩形梁受力图

Fig. 8 Stress diagram of rectangular beam

$x=0$ 处, 取边界条件 $\frac{dy}{dx}=0$ 、 $y=0$, 得:

$$\alpha_3 = \begin{cases} \frac{-6P(l-l_1-x)^2 + 6P(l-l_1)}{EB(\xi h)^3} & (0 \leq x \leq l-l_1) \\ \frac{P(l-l_1)^2}{2EB(\xi h)^3} & (l-l_1 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (13)$$

$$\Delta_3 = \begin{cases} \frac{2P(l-l_1-x)^3 + 6P(l-l_1)^2x - 2P(l-l_1)^3}{EB(\xi h)^3} & (0 \leq x \leq l-l_1) \\ \frac{P[3(l-l_1)^3x - (l-l_1)^3]}{6EB(\xi h)^3} & (l-l_1 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (14)$$

采用叠加方法, 齿条在受力点处的挠度与弯曲角度为:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (15)$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta'_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \quad (16)$$

悬臂齿条基体刚度为:

$$K_s = \frac{\partial M}{\partial \alpha} \quad (17)$$

以考虑齿条基体形变的上轧辊二级齿轮-齿条为研究对象, 主要参数为: 上轧辊二级齿轮齿数为 27, 二级齿条齿数为 34, $B=20$ mm, $h=40$ mm, $l_1=100$ mm, $L=1.3$ m, 齿轮与齿条模数为 4 mm, $m_3=2.8$ kg, $m_4=3.2$ kg, 啮合角为 20° 。图 9 为考虑齿条基体形变和正常的齿轮-齿条时变啮合刚度曲线。

5 数值模拟

以某厂叶片轧机为例, 轧制参数如下: 上轧

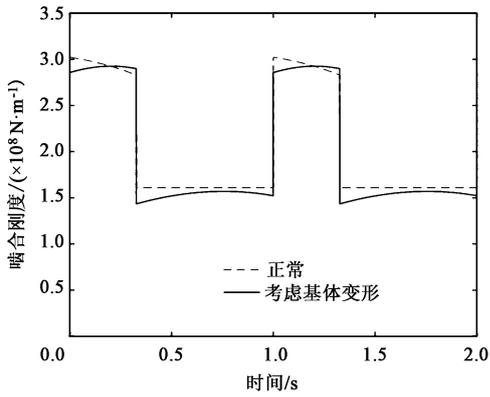


图 9 齿轮-齿条啮合刚度

Fig. 9 Meshing stiffness of gear-rack

辊一级齿条齿数为 10，上、下轧辊一级齿轮齿数为 17；下轧辊一级齿条齿数为 8；上、下轧辊一级齿轮、齿条模数为 8 mm，啮合误差 $e_1=e_2=e_3=10\ \mu\text{m}$ ，

$e_4=15\ \mu\text{m}$ ， $K_{1-3}=K_{2-5}=3\times 10^{10}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ， $K_{3-4}=2.85\times 10^{10}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ， $C_{1-3}=C_{2-5}=1.5\times 10^6$ ， $C_{3-4}=0.8\times 10^6$ ， $\mu=0.05$ ， $b^*=0.02\ \text{mm}$ ， $\beta_e=1.7\ \text{GPa}$ ， $A_1=0.64\ \text{m}^2$ ， $A_2=0.33\ \text{m}^2$ ，液压缸活塞有效行程 $L'=100\ \text{mm}$ ，初始相位角 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=0$ 。对齿轮传动系统振动特性进行数值模拟，研究传动系统的振动行为。

5.1 液压缸动力学的影响

图 10~图 12 为未考虑液压缸动力学特性时系统动力学特性。由图 10~图 12 可知，上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮-齿条啮合振动位移均处于周期振动，相图为封闭曲线，说明此时系统处于稳定状态，上轧辊一级齿轮振动位移相对下轧辊一级齿轮以及二级齿轮-齿条啮合振动位移幅值大。

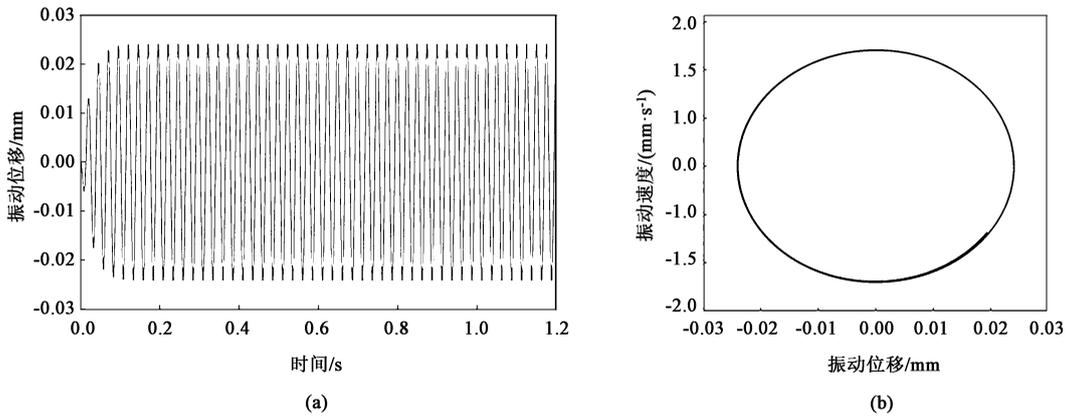


图 10 未考虑液压缸动力学特征时上轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 10 Movement state of primary gear for upper roll without considering dynamic characteristics for hydraulic cylinder

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

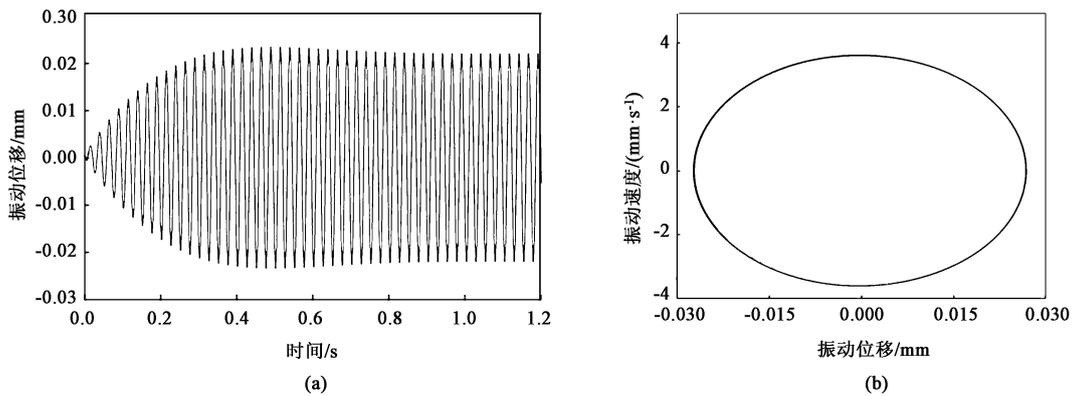


图 11 未考虑液压缸动力学特征时下轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 11 Movement state of primary gear for lower roll without considering dynamic characteristics for hydraulic cylinder

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

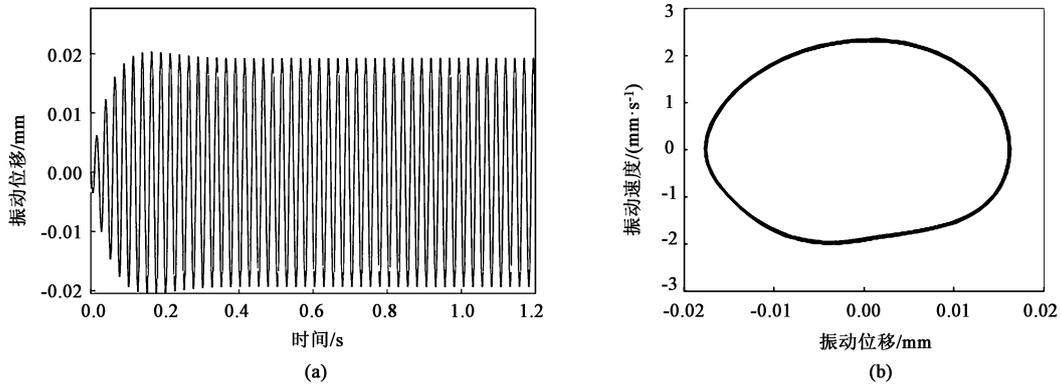


图 12 未考虑液压缸动力学特征时上轧辊二级齿轮-齿条的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 12 Movement state of secondary gear-rack for upper roll without considering dynamic characteristics for hydraulic cylinder

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

当其他条件不变, 液压油缸无杆腔的初始有效长度 $L_1 = 30 \text{ mm}$ 时, 系统动力学特性如图 13~图 15

所示。由图 13~图 15 可知, 上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮-齿条啮合振动位移为非周期运

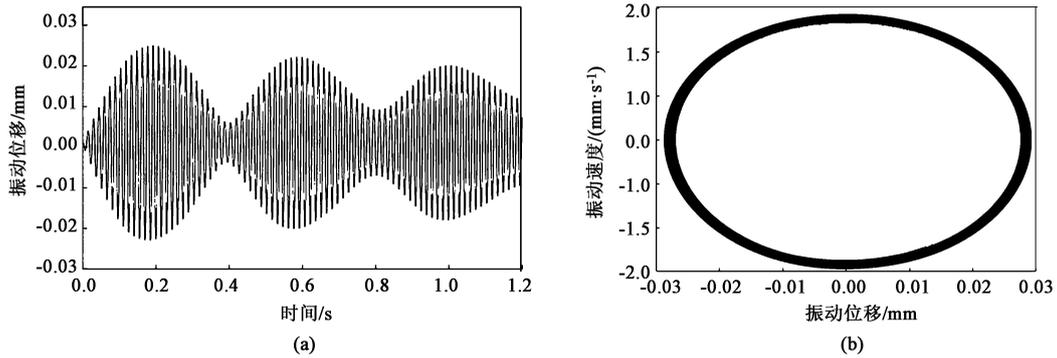


图 13 $L_1 = 30 \text{ mm}$ 时上轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 13 Movement state of primary gear for upper roll when $L_1 = 30 \text{ mm}$

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

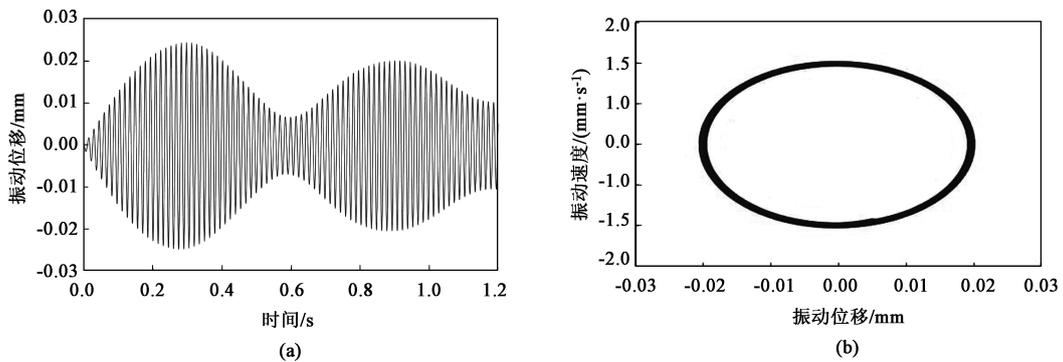


图 14 $L_1 = 30 \text{ mm}$ 时下轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 14 Movement state of primary gear for lower roll when $L_1 = 30 \text{ mm}$

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

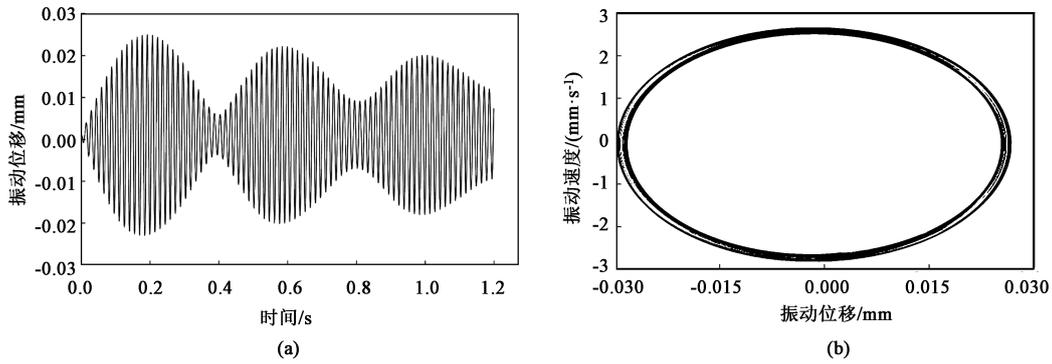


图 15 $L_1 = 30\text{ mm}$ 时上轧辊二级齿轮-齿条的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 15 Movement state of secondary gear-rack for upper roll when $L_1 = 30\text{ mm}$

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

动，相图不再为封闭曲线，说明系统进入了倍周期运动状态。

图 16~图 18 为液压油缸无杆腔的初始有效长度

$L_1 = 50\text{ mm}$ 时的系统动力学特性。由图 16~图 18 可知，上、下轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮-齿条啮合振动位移为非周期运动，相图不再为封闭曲

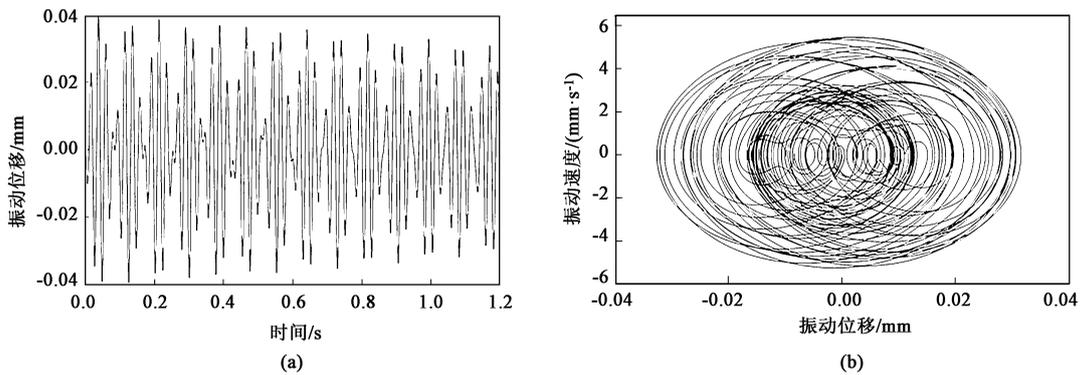


图 16 $L_1 = 50\text{ mm}$ 时上轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 16 Movement state of primary gear for upper roll when $L_1 = 50\text{ mm}$

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

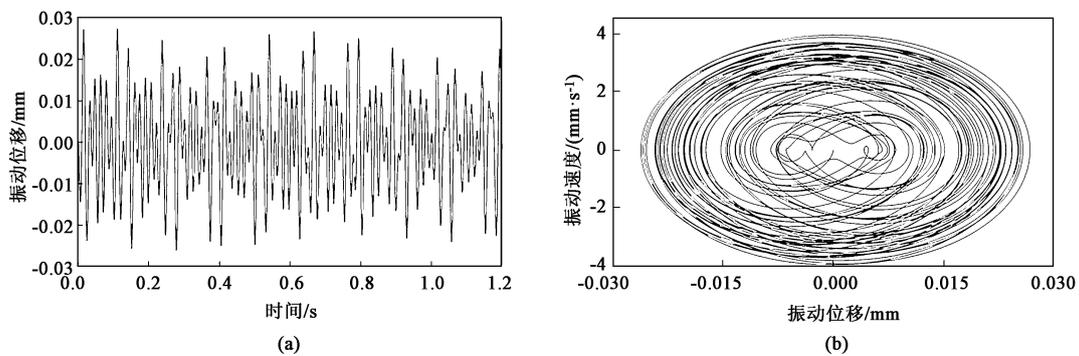


图 17 $L_1 = 50\text{ mm}$ 时下轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 17 Movement state of primary gear for lower roll when $L_1 = 50\text{ mm}$

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

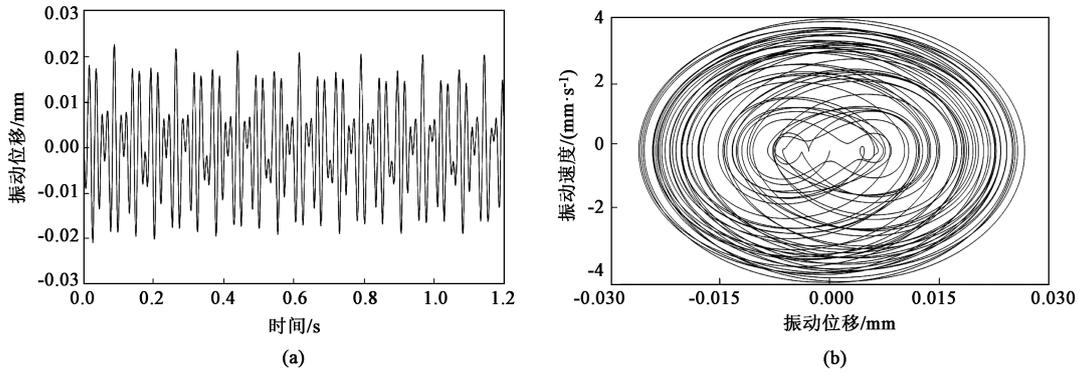


图 18 $L_1 = 50$ mm 时上轧辊二级齿轮-齿条的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 18 Movement state of secondary gear-rack for upper roll when $L_1 = 50$ mm

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

线, 说明系统进入了混沌运动状态, 液压油缸活塞位置的改变使得叶片轧机系统由稳定向发散运动状态发展, 影响了叶片表面质量。

5.2 二级齿轮-齿条啮合刚度的影响

当仅考虑轧辊二级齿条基体形变引起的齿轮-齿

条啮合刚度变化时, 系统动力学特性如图 19~图 21 所示, 由图 19~图 21 可知, 上轧辊一级齿轮振动位移在前 0.4 s 时刻产生一定的波动, 随后逐渐收敛达到稳定状态, 上轧辊二级齿轮-齿条振动位移在前 0.2 s 时刻产生一定的波动, 随后逐渐达到稳定,

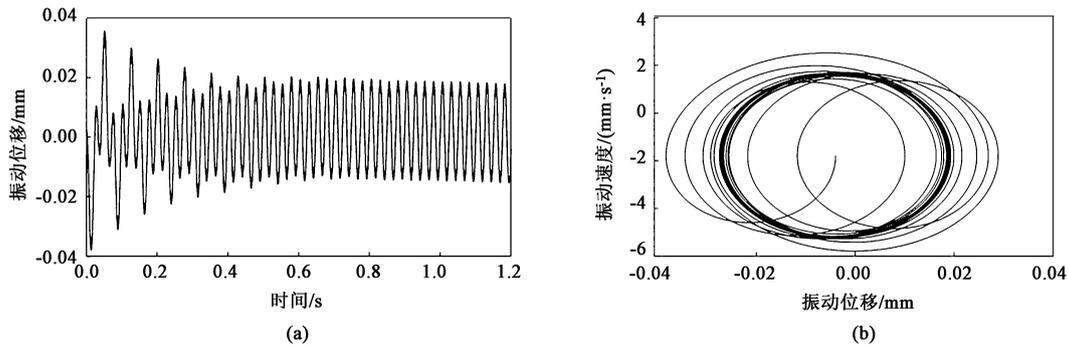


图 19 仅考虑轧辊二级齿条基体形变时上轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 19 Movement state of primary gear for upper roll only considering deformation of secondary rack matrix for roll

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

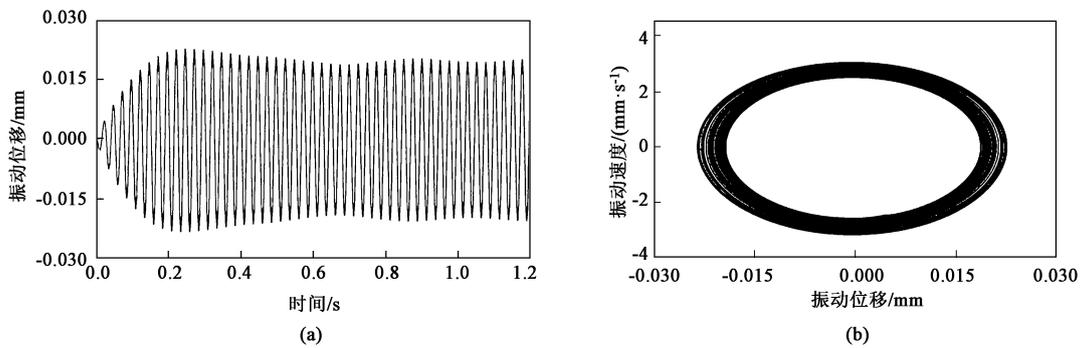


图 20 仅考虑轧辊二级齿条基体形变时下轧辊一级齿轮的运动状态

(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 20 Movement state of primary gear for lower roll only considering deformation of secondary rack matrix for roll

(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

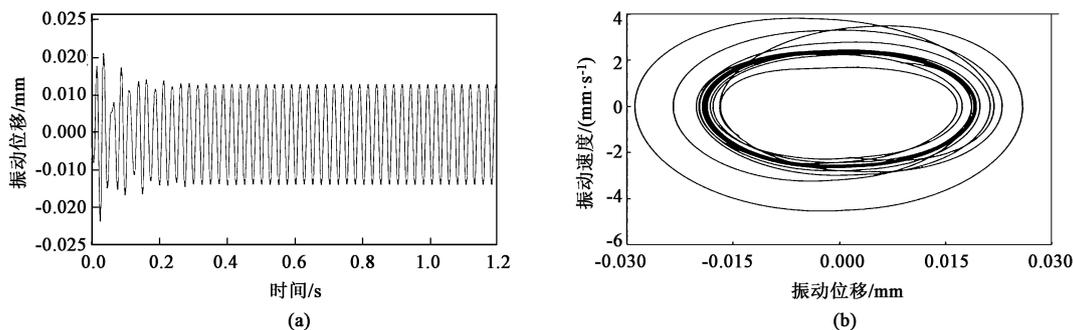


图 21 仅考虑轧辊二级齿条基体形变时上轧辊二级齿轮-齿条的运动状态
(a) 振动位移 (b) 相图

Fig. 21 Movement state of secondary gear-rack for upper roll only considering deformation of secondary rack matrix for roll
(a) Vibration displacement (b) Phase diagram

相图均为非圆多圈不规则封闭的曲线，说明此时系统具有向不稳定状态发展的趋势。此外，通过图 20 可知，齿轮-齿条啮合刚度的变化使得下轧辊一级齿轮的运动状态逐渐进入倍周期运动，但对振动位移幅值的影响较小。

6 实验验证

为了对上述理论分析进行验证，对叶片辊轧机进行现场测试。以上轧辊二级齿轮-齿条测试结果为例，采用 YD 系列压电加速度传感器采集振动信号，将其布置在移动齿条侧面，采集水平振动数据。使用 DH5922D 动态信号测试分析系统对振动信号进行存储，测试原理如图 22 所示，获得 $L_1 = 30 \text{ mm}$ 、 $L_1 = 50 \text{ mm}$ 时上轧辊二级齿条振动加速度以及频谱数据。

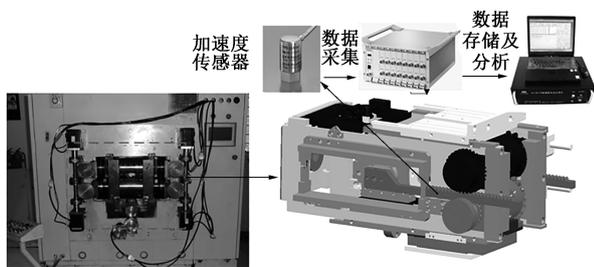


图 22 测试原理
Fig. 22 Test principle

图 23 列举了未考虑液压油缸无杆腔有效长度、 $L_1 = 30 \text{ mm}$ 、 $L_1 = 50 \text{ mm}$ 时，上轧辊二级齿条振动加速度、频率仿真结果及测试结果，通过对比分析可知，齿条振动加速度仿真值与测试值的规律基本一致。通过将不同条件下振动加速度均值、振动主频率与测试值对比（表 1）可知，考虑液压油缸

无杆腔有效长度时的理论数据更接近实验结果，相对误差均在 15% 以内，验证了本文所建立模型的可靠性。

图 24 列举了未考虑齿条基体变形、考虑齿条基体变形时，上轧辊二级齿条振动加速度及频率仿真结果与液压油缸无杆腔有效长度 $L_1 = 50 \text{ mm}$ 时的实验测试结果。由图 24 可以看出，考虑齿条基体变形时，振动加速度及频率波动规律与测试值更接近。通过对比振动加速度均值、振动主频率（表 1）可知，本文方法所获得的振动加速度及振动主频率数值与测试值相差较小，相对误差在 10% 以内，因此，考虑齿条基体变形时的动力学模型更合理。

7 结论

(1) 综合考虑驱动液压油缸的非线性动力学特性以及齿条基体弹性形变等因素的影响，建立了液压油缸与叶片辊轧机传动系统耦合振动模型，分析了液压油缸非线性刚度以及齿轮-齿条啮合刚度作用下的传动系统振动特性。

(2) 通过分析液压油缸无杆腔初始有效长度对辊轧机传动系统的影响，发现不同的无杆腔初始长度作用下，轧机辊系振动在周期运动、倍周期运动和混沌运动等多种运动状态之间交替变化。此外，轧辊二级齿条基体形变引起齿轮-齿条啮合刚度的变化，引起上轧辊一级齿轮以及上轧辊二级齿轮-齿条的振动位移在初始时刻产生一定的波动，随后趋于稳定状态，而对下轧辊一级齿轮的运动状态影响较小，并通过实验验证了本文所建立模型的可靠性。

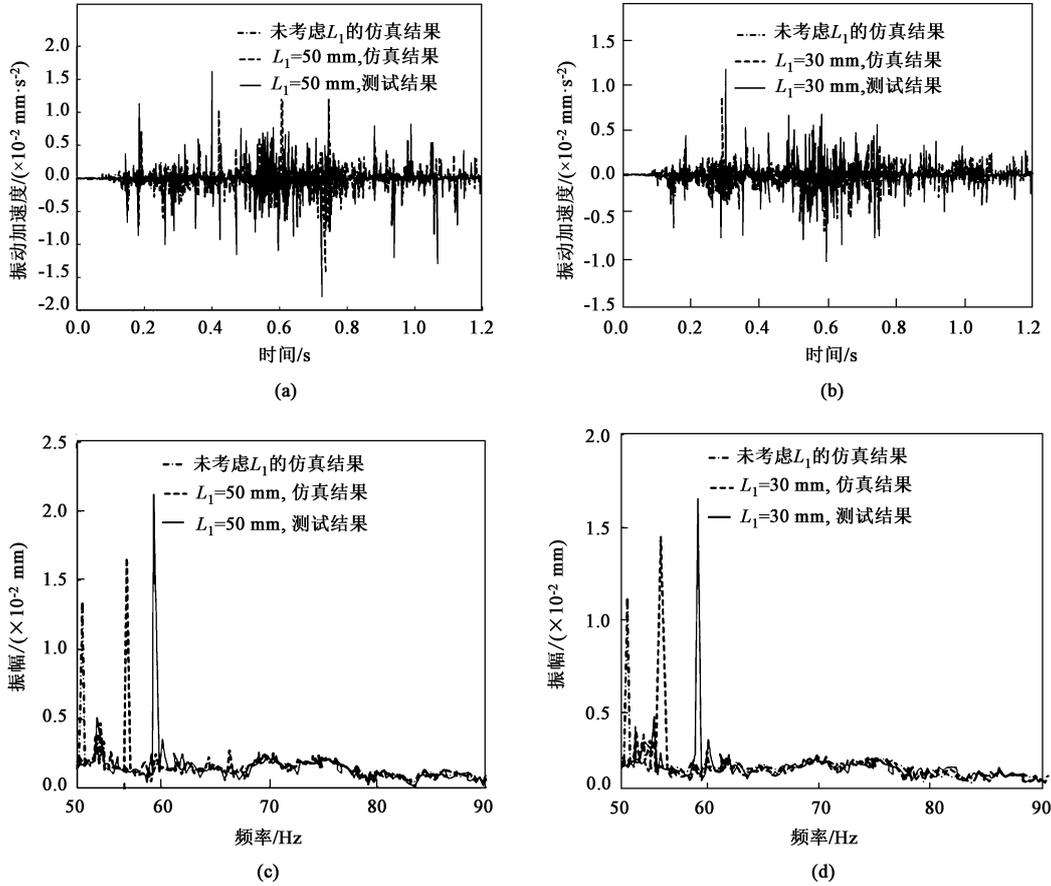


图 23 有无考虑 L_1 的上轧辊二级齿条振动信号图

(a) $L_1 = 50$ mm, 振动加速度 (b) $L_1 = 30$ mm, 振动加速度 (c) $L_1 = 50$ mm, 频谱图 (d) $L_1 = 30$ mm, 频谱图

Fig. 23 Vibration signal diagrams of secondary rack for upper roll with and without considering L_1

(a) $L_1 = 50$ mm, vibration acceleration (b) $L_1 = 30$ mm, vibration acceleration (c) $L_1 = 50$ mm, spectral diagram (d) $L_1 = 30$ mm, spectral diagram

表 1 仿真值与测试值对比

Table 1 Comparison of simulated and experimental values

参数	振动加速度/($\text{mm} \cdot \text{s}^{-2}$)	频率/Hz
未考虑 L_1 的仿真值	0.0056	50.55
$L_1 = 30$ mm, 仿真值	0.0105	54.15
$L_1 = 30$ mm, 测试值	0.0113	58.32
$L_1 = 50$ mm, 仿真值	0.0117	55.37
$L_1 = 50$ mm, 测试值	0.0125	59.24
未考虑齿条基体变形	0.0056	50.55
考虑齿条基体变形	0.0098	53.02
$L_1 = 50$ mm, 测试值	0.0107	57.72

参考文献:

[1] 朱勇, 姜万录, 王梦, 等. 非线性时变力作用下液压缸爬行机理与抑制方法研究 [J]. 农业机械学报, 2014, 45 (3):

305-313.

Zhu Y, Jiang W L, Wang M, et al. Creeping mechanism and suppression methods of hydraulic cylinder under nonlinear time-varying force [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2014, 45 (3): 305-313.

[2] Xiang L, Zhang Y, Gao N, et al. Nonlinear dynamics of a multi-stage gear transmission system with multi-clearance [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28 (3): 1850034.

[3] Yua W N, Mechefskea C K, Markus T. The dynamic coupling behaviour of a cylindrical geared rotor system subjected to gear eccentricities [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, (107): 105-122.

[4] Shi J F, Gou X F, Zhu L Y. Modeling and analysis of a spur gear pair considering multi-state mesh with time-varying parameters and backlash [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, (134): 582-603.

[5] 凌启辉, 赵前程, 王宪, 等. 热连轧机工作辊水平-垂直非

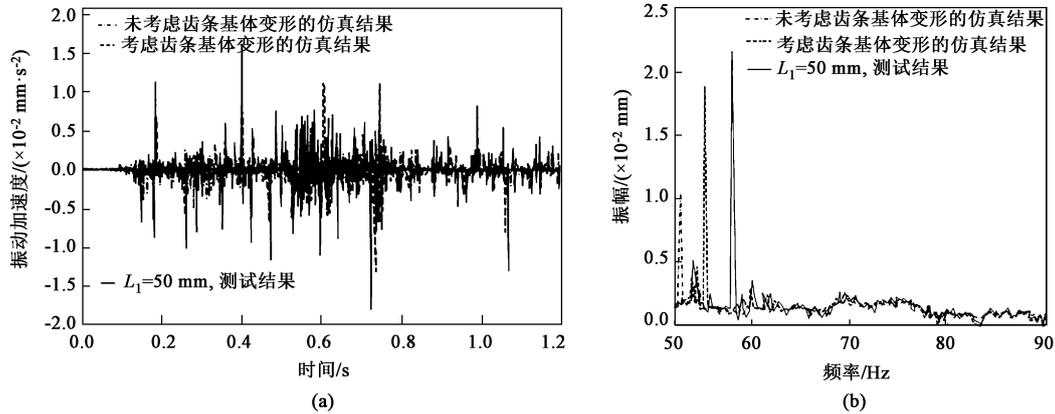


图24 有无考虑齿条基体变形的上轧辊二级齿条振动信号图

(a) 振动加速度 (b) 频谱图

Fig. 24 Vibration signal diagrams of secondary rack for upper roll with and without considering rack matrix deformation

(a) Vibration acceleration (b) Spectral diagram

线性振动特性及抑制 [J]. 中国机械工程, 2017, 28 (16): 1943-1950.

Ling Q H, Zhao Q C, Wang X, et al. Work roll horizontal-vertical nonlinear vibration characteristics and suppression of hot strip tandem mills [J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28 (16): 1943-1950.

[6] 曾令强, 臧勇, 郜志英, 等. 轧机整体耦合建模问题研究 [J]. 机械工程学报, 2015, 51 (14): 46-53.

Zeng L Q, Zang Y, Gao Z Y, et al. Study on overall coupled modeling of the rolling mill [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51 (14): 46-53.

[7] 刘晓滢, 臧勇, 郜志英, 等. 多方向耦合振动连轧机再生颤振建模及应用 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2017, 48 (3): 635-643.

Liu X C, Zang Y, Gao Z Y, et al. Multidirectional regenerative chatter model of tandem rolling mills and its application [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2017, 48 (3): 635-643.

[8] 王桥医, 张秋波, 崔明超, 等. 1850 四辊铝带冷轧机动力学特性与机理研究 [J]. 振动. 测试与诊断, 2021, 41 (5): 991-998, 1038-1039.

Wang Q Y, Zhang Q B, Cui M C, et al. Dynamic characteristics and mechanism analysis of 1850 four-high aluminum strip cold rolling mill [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41 (5): 991-998, 1038-1039.

[9] 张阳, 孙建亮, 杜东源. 板带轧机柔性多体系统耦合动力学建模研究 [J]. 机械强度, 2019, 41 (4): 799-806.

Zhang Y, Sun J L, Du D Y. Strip rolling mill's flexible multi-body system coupling dynamic modeling research [J]. Journal of Mechanical Strength, 2019, 41 (4): 799-806.

[10] 吴继民, 张义方, 朱小龙, 等. 轧机主传动系统在双源扰动作用下的动力学特性研究 [J]. 振动工程学报, 2019, 32 (4): 581-589.

Wu J M, Zhang Y F, Zhu X L, et al. Research on dynamic characteristics of main drive system in rolling mill under double source disturbance [J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32 (4): 581-589.

[11] 郭志强, 常明瑞, 任学平, 等. 不同间隙的轧机主传动系统的动态特性研究 [J]. 机械强度, 2019, 41 (6): 1504-1508.

Guo Z Q, Chang M R, Ren X P, et al. Study on the dynamic characteristics of the main drive system of rolling mill [J]. Journal of Mechanical Strength, 2019, 41 (6): 1504-1508.

[12] 侯东晓, 郭大武, 陈小辉. 基于动态轧制力的四辊轧机垂直-扭转耦合非线性振动特性研究 [J]. 振动与冲击, 2020, 39 (20): 106-112.

Hou D X, Guo D W, Chen X H. A study on vertical-torsional coupled nonlinear vibration characteristics of 4-h rolling mill based on dynamic rolling force [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39 (20): 106-112.

[13] 刘彬, 潘贵翔, 李鹏, 等. 液压缸非线性刚度的轧机辊系振动分析 [J]. 钢铁, 2017, 52 (3): 94-99.

Liu B, Pan G X, Li P, et al. Vibration analysis of roll system with nonlinear stiffness of hydraulic cylinder [J]. Iron and Steel, 2017, 52 (3): 94-99.

[14] 高崇一, 李建雄, 魏云平. 轧机主传动系统扭振响应数值模拟及结构失效研究 [J]. 应用力学学报, 2022, 39 (2): 268-273.

Gao C Y, Li J X, Wei Y P. Numerical simulation on torsional vibration response of main drive system of rolling mill and structural failure analysis [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2022, 39 (2): 268-273.

[15] 毛君, 张瑜, 孟辉, 等. 间隙条件下辊轧机两级传动系统动态特性分析 [J]. 钢铁, 2015, 50 (10): 45-53.

Mao J, Zhang Y, Meng H, et al. Dynamic characteristics analysis of rolling mill secondary transmission system with clearances [J]. Iron and Steel, 2015, 50 (10): 45-53.