

装备与成套技术

## 谐波力矩和辊系偏心影响下轧机水平振动研究

张瑞成, 张世琦, 梁卫征

(华北理工大学 电气工程学院, 河北 唐山 063210)

**摘要:** 考虑谐波力矩和轧辊偏心的影响, 建立了工作辊水平振动的动力学模型。采用多尺度近似解析法得到了在谐波力矩和轧辊偏心影响下工作辊水平方向的主共振、超谐波共振和亚谐波共振的幅频特性方程, 分析了阻尼系数、轧制力非线性系数以及谐波力矩变化下系统的幅频特性。结果表明: 系统阻尼系数的增大会使幅频特性曲线的幅值和共振区域变小; 随着轧制力非线性系数和谐波力矩的增大, 幅频特性曲线的曲率和幅值增大, 系统的稳定性降低。最后, 对模型进行数值求解, 并通过相轨迹和分岔混沌图等方法分析了谐波力矩和辊系偏心影响下系统的运动规律, 发现谐波力矩和轧辊偏心力共同作用时会导致工作辊在水平方向上的混沌运动范围增大, 使系统更容易出现失稳现象。通过将模型的数值解与近似解对比, 进一步验证了谐波力矩和轧辊偏心力会降低工作辊运行的稳定性。研究结果为稳定工作辊的运行提供了一定的理论依据。

**关键词:** 水平振动; 共振; 谐波力矩; 幅频特性; 轧辊偏心力

**DOI:** 10.13330/j.issn.1000-3940.2023.10.028

**中图分类号:** TH113.1; TG335.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-3940 (2023) 10-0182-10

## Study on horizontal vibration for rolling mill under influences of harmonic moment and roll system eccentricity

Zhang Ruicheng, Zhang Shiqi, Liang Weizheng

(College of Electrical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan 063210, China)

**Abstract:** Considering the influences of harmonic moment and roll eccentricity, a dynamic model of horizontal vibration for work roll was established, and the amplitude-frequency characteristic equations of horizontal principal resonance, super-harmonic resonance and sub-harmonic resonance of work roll under the influences of harmonic moment and roll eccentricity were obtained by multi-scale approximate analytic method. Then, the amplitude-frequency characteristics of the system under the changes of damping coefficient, nonlinear coefficient of rolling force and harmonic moment were analyzed. The results show that the amplitude and resonance region of the amplitude-frequency characteristic curve decrease with the increasing of the damping coefficient of the system, the curvature and amplitude of the amplitude-frequency characteristic curve increase with the increasing of the nonlinear coefficient of rolling force and the harmonic moment, and the stability of the system is reduced. Finally, the model was numerically solved, and the motion rules of the system under the influences of harmonic moment and roll system eccentricity were analyzed by the methods such as phase trajectory and bifurcation chaos diagrams. It is found that the chaotic motion range of work roll in the horizontal direction increases when the harmonic moment and the roll eccentricity force work together, making the system more prone to instability. By comparing the numerical solution of the model with the approximate solution, it is further verified that the harmonic moment and the roll eccentricity force reduce the stability of work roll. The results provide a theoretical basis for improving the operation stability of work roll.

**Key words:** horizontal vibration; resonance; harmonic moment; amplitude-frequency characteristics; roll eccentricity force

为适应现代化产业的发展, 对轧制产品的质量

提出了更高的要求, 同时对生产设备的稳定性带来了更大的挑战<sup>[1]</sup>。然而, 轧机振动不仅会降低产品的品质和轧制效率, 严重时还会造成轧制设备的损坏, 威胁人员的安全。

水平振动发生时常常伴有巨大的噪音, 轧件表面还会带有明暗相间的波纹, 严重时还会导致断带、窜辊等事故。张瑞成等<sup>[2]</sup>研究轧机水平振动时, 将工作辊与轧件之间的刚度和阻尼分别采用 Rayleigh 和 Duffing 模型表示。Fan X B 等<sup>[3]</sup>发现减小轧辊轴

收稿日期: 2022-08-19; 修订日期: 2022-11-13

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (F2018209201); 唐山市科技局科技计划项目 (22130213G); 河北省省属高校基本科研业务费资助项目 (JQN2021021)

作者简介: 张瑞成 (1975-), 男, 博士, 教授

E-mail: 1063974891@qq.com

通信作者: 梁卫征 (1982-), 女, 硕士, 副教授

E-mail: wzliang1982@126.com

承座与牌坊立柱的间隙可有效抑制轧辊水平振动。张明等<sup>[4]</sup>将上/下工作辊在轧制过程中的运动状态视为非对称运动,同时考虑了轧件与上/下工作辊间摩擦因数的非对称性对系统运行稳定性的影响。王运涛等<sup>[5]</sup>考虑了辊缝动态摩擦力以及工作辊撞击牌坊时对系统稳定性的影响,建立了热轧机辊系非线性水平振动模型。孙建亮等<sup>[6]</sup>对轧机水平振动的固有频率和振型进行了计算和测试,同时分析了轧件厚度变化对水平振动特性的影响。闫晓强等<sup>[7]</sup>针对轧制过程中辊系发生的水平振动现象,提出了一种液压振动抑制器,并通过仿真软件对抑振器的效果进行了验证。

近年来,随着对振动机理的充分认识,学者们发现电机作为主要动力源,其非正常运作必然会对轧机稳定性带来影响。Tang H P 等<sup>[8]</sup>针对主传动系统失稳现象,建立了机电耦合振动模型。张义方等<sup>[9]</sup>考虑电流谐波和轧制力谐波的影响,建立了主传动扭转振动动力学模型。刘爽等<sup>[10]</sup>考虑了电机参数变化对主传动系统稳定性的影响,建立了主传动系统非线性扭转振动动力学模型。电机作为轧辊直接动力源,其参数变化必然会影响轧辊的正常运行,但大多数学者在分析轧辊运动状态时往往会忽略电机参数的影响。针对此问题,考虑谐波力矩和辊系偏心作用,建立了工作辊水平振动动力学模型。采用多尺度法得到了受谐波力矩和轧辊偏心影响的工作辊水平方向的超谐波共振和亚谐波共振幅频特性方程,分析了阻尼系数、轧制力非线性系数和谐波力矩对系统幅频特性的影响。最后对模型进行数值求解,并通过相平面图法和分岔混沌图进一步分析了以谐波力矩和偏心力幅值为变量的系统分岔特性。

## 1 工作辊水平振动动力学模型

### 1.1 电流谐波对工作辊水平振动的影响

变频器接受电网供电时,除了输出基波电流外,还会存在频率为基频奇数倍且随着谐波倍数增加幅值减小的谐波电流,在电机内部的电磁作用下使电机产生同频率的谐波力矩,并通过万向接轴传递给工作辊,进一步影响工作辊的稳定。

在两相静止坐标系  $\alpha$ - $\beta$  下,建立异步电机数学模型:

$$\begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{r\alpha} \\ u_{r\beta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} R_s + L_s p & 0 & L_m p & 0 \\ 0 & R_s + L_s p & 0 & L_m p \\ L_m p & w L_m & R_r + L_r p & w L_r \\ -w L_m & L_m p & -w L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:  $u_{s\alpha}$ 、 $u_{s\beta}$  为定子电压;  $u_{r\alpha}$ 、 $u_{r\beta}$  为转子电压;  $i_{s\alpha}$ 、 $i_{s\beta}$  为定子电流;  $i_{r\alpha}$ 、 $i_{r\beta}$  为转子电流;  $L_s$  为定子绕组自感;  $L_m$  为定子绕组和转子绕组间的互感;  $L_r$  为转子绕组的漏感;  $R_s$  为定子电阻;  $R_r$  为转子电阻;  $p$  为电机极对数;  $w$  为转子角速度。

根据式 (1) 可得到在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下,定子的电压方程为<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \frac{di_{s\alpha}}{dt} + L_m \frac{di_{r\alpha}}{dt} \\ u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \frac{di_{s\beta}}{dt} + L_m \frac{di_{r\beta}}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $t$  为时间。

定子的三相电流方程为<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} i_A = i_0 \sin(pwt + \varphi_1) + \sum_h i_h \cos(hpwt + \varphi_h) \\ i_B = i_0 \sin(pwt + \varphi_1 - \frac{2}{3}\pi) + \sum_h i_h \cos(hpwt + \varphi_h - \frac{2}{3}\pi) \\ i_C = i_0 \sin(pwt + \varphi_1 + \frac{2}{3}\pi) + \sum_h i_h \cos(hpwt + \varphi_h + \frac{2}{3}\pi) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $i_A$ 、 $i_B$  和  $i_C$  为三相电流;  $i_0$  和  $\varphi_1$  分别为基波电流的幅值和相角;  $i_h$  和  $\varphi_h$  分别为  $h$  次谐波的幅值和相位角。

根据坐标变换公式有:

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(pwt) & \cos(pwt - \frac{2}{3}\pi) & \cos(pwt + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin(pwt) & -\sin(pwt - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(pwt + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (4)$$

可得:

$$\begin{cases} i_{s\alpha} = i_{0d} + \sum_h i_{hd} \cos(hpwt + \varphi_{hd}) \\ i_{s\beta} = i_{0q} + \sum_h i_{hq} \cos(hpwt + \varphi_{hq}) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $i_{0d}$  和  $i_{0q}$  分别为基波电流在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下的幅值;  $i_{hd}$ 、 $i_{hq}$  分别为谐波电流在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下的幅值;  $\varphi_{hd}$ 、 $\varphi_{hq}$  分别为谐波电流在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下的相位角。

转子磁链在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下可表示为:

$$\begin{cases} \psi_{r\alpha} = L_m i_{s\alpha} + L_r i_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} = L_m i_{s\beta} + L_r i_{r\beta} \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\psi_{r\alpha}$ 、 $\psi_{r\beta}$  为  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下的转子磁链。

根据式 (2) 可得出  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下转子的电流为:

$$\begin{cases} i_{r\alpha} = \frac{1}{L_r}(\psi_{r\alpha} - L_m i_{s\alpha}) \\ i_{r\beta} = \frac{1}{L_r}(\psi_{r\beta} - L_m i_{s\beta}) \end{cases} \quad (7)$$

在式 (1) 中, 令转子电压  $u_{r\alpha} = u_{r\beta} = 0$ , 将式 (7) 代入可得转子磁链方程为:

$$\begin{cases} \psi_{r\alpha} = \frac{1}{T_r p + 1}(L_m i_{s\alpha} - w T_r \psi_{r\beta}) \\ \psi_{r\beta} = \frac{1}{T_r p + 1}(L_m i_{s\beta} + w T_r \psi_{r\alpha}) \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $T_r$  为转子的时间常数,  $T_r = L_m / R_r$ 。

在  $\alpha$ - $\beta$  坐标系下, 电磁力矩可表示为:

$$T_m = \frac{PL_m}{L_r}(i_{s\beta}\psi_{r\alpha} - \psi_{r\beta}i_{s\alpha}) \quad (9)$$

将式 (5) 和式 (8) 代入式 (9) 中, 可得到在谐波影响下的电磁力矩<sup>[8]</sup>:

$$T_m = T_0 + T_A \cos(2\pi f_L t + \varphi_T) \quad (10)$$

式中:  $T_0$  为稳态基波力矩;  $T_A$ 、 $f_L$  和  $\varphi_T$  分别为谐波力矩幅值、频率和相位角。

假设电机与工作辊之间是刚性连接, 电磁力矩在工作辊水平方向的作用力可表示为:

$$F_{LV} = T_m / r \quad (11)$$

式中:  $r$  为工作辊半径。

### 1.2 辊系偏心作用对工作辊水平振动的影响

轧辊偏心现象示意图如图 1 所示, 由于轧机结构间隙的存在会使轧辊理论旋转中心  $O_1$  与实际旋转中心  $O_2$  不重合, 导致偏心距  $e$  的出现。而在轧制过程中受板材变形和辊系热膨胀效应的影响, 会造成偏心距的增大。同时, 受偏心作用的影响而产生的离心惯性力会作用在轧辊上, 并影响轧辊运行的稳定性。

受偏心作用产生的离心惯性力  $F_L$  可表示为:

$$F_L = Mew_B^2 \quad (12)$$

式中:  $M$  为工作辊偏心质量;  $w_B$  为工作辊的旋转角速度。

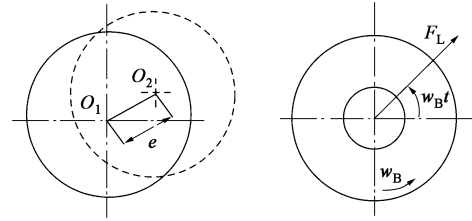


图 1 轧辊偏心现象示意图

Fig. 1 Schematic diagrams of roll eccentricity phenomenon

偏心作用在工作辊水平方向的等效偏心力  $F_V$  可表示为<sup>[13]</sup>:

$$F_V = Mew_B^2 \cos(w_B t + \varphi_0) \quad (13)$$

式中:  $\varphi_0$  为偏心初始相位角。

### 1.3 工作辊水平振动动力平衡方程

假设轧机上下工作辊系的结构相同, 考虑轧制力波动、衬板间隙以及电磁力矩和轧辊偏心对工作辊稳定性的影响, 将轧机结构简化为弹簧-质量-阻尼模型, 如图 2 所示。

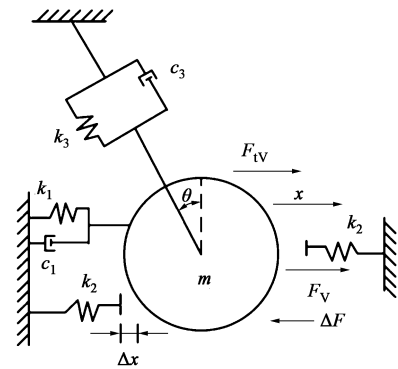


图 2 轧机水平振动模型

Fig. 2 Horizontal vibration model of rolling mill

图 2 中,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  分别为工作辊与轧件间、工作辊与轧机牌坊立柱间、工作辊与支撑辊间的线性刚度;  $c_1$ 、 $c_3$  分别为工作辊与轧件间、工作辊与支撑辊间的线性阻尼;  $\Delta x$  为工作辊轴承座与牌坊之间的距离;  $\theta$  为工作辊质心偏离轧制中心线的角度;  $x$  为工作辊振动位移;  $\Delta F$  为轧制力在轧辊表面形成的动态分量;  $m$  为上工作辊质量。

实际轧制过程中, 轧制力方向并非规则地垂直于轧辊表面, 由于前后张力的变化会形成一定的偏转角度, 从而在轧辊表面形成水平分量。轧制力动态变化可表示为<sup>[14]</sup>:

$$\Delta F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (14)$$

式中:  $a_1$ 、 $a_2$  和  $a_3$  为轧制力在水平方向投影的刚度系数。

为方便换辊, 工作辊轴承座与轧机牌坊立柱之间会存在一定的间距, 当外激励较大时, 工作辊轴承座会与机架发生碰撞, 造成工作辊的稳定性进一步降低。因此, 工作辊在水平方向上的刚度可用分段函数表示<sup>[15]</sup>:

$$f(x) = \begin{cases} (k_1 + k_2 + k_3 \sin \theta)x, & x \leq -\Delta x \text{ 或 } x \geq 0 \\ (k_1 + k_3 \sin \theta)x, & -\Delta x < x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

根据达朗贝尔原理建立工作辊水平振动动力平衡方程:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_3 \sin \theta)\dot{x} + f(x) + \Delta F = F_{IV} + F_V \quad (16)$$

式中:  $\dot{x}$  为水平方向速度;  $\ddot{x}$  为水平方向加速度。

令  $x = y_0 + y_1$ , 其中,  $y_0$  为稳态轧制时工作辊的水平位移,  $y_1$  为发生振动时工作辊的水平位移。稳态轧制时, 电磁力矩和偏心力不会影响系统稳定, 即  $F_{IV} = F_V = 0$ , 且存在  $y_1 = \dot{y}_1 = \ddot{y}_1 = 0$ , 其中,  $\dot{y}_1$  为振动时工作辊水平方向速度,  $\ddot{y}_1$  为振动时工作辊水平方向加速度, 将其代入式 (16) 可得平衡条件为  $f(y_0) = 0$ 。将该平衡条件代入式 (16) 中, 令  $x = y_1$ , 同时假设基波电磁力矩  $T_0$  不会对工作辊稳定性造成影响, 且谐波力矩和偏心力初始相位  $\varphi_T = \varphi_0 = 0$ , 可得:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_3 \sin \theta)\dot{x} + f(x) + \Delta F = \frac{T_A}{r} \cos(2\pi f_L t) + Mew_B^2 \cos(w_B t) \quad (17)$$

为简化计算过程, 将式 (17) 水平振动位移  $x$  和时间  $t$  进行无量纲化处理, 可令:  $\bar{x} = \frac{x}{A} \bar{t} = \frac{t}{T}$ ,

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{2\pi f_L}{w_0}, \quad \bar{\Omega}_2 = \frac{w_B}{w_0}, \quad \bar{k}_1 = \frac{a_2 A T^2}{m}, \quad \bar{k}_2 = \frac{a_3 A^2 T^2}{m}, \quad \bar{c} = \frac{(c_1 + c_3 \sin \theta) T}{m}, \quad \bar{F}_1 = \frac{T_A T^2}{r m A}, \quad \bar{F}_2 = \frac{Mew_B^2 T^2}{m A}, \quad \eta_1 = \frac{k_2 T^2}{m}, \quad w_0^2 = \frac{(k_1 + k_3 \sin \theta + a_1) T^2}{m} = 1。$$

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} \eta_1 \bar{x}, & \bar{x} \leq -\Delta x \text{ 或 } \bar{x} \geq 0 \\ 0, & -\Delta x < \bar{x} < 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $A$  为振幅;  $T$  为时间量纲;  $\bar{x}$  为无量纲水平振动位移;  $\bar{t}$  为无量纲时间;  $\bar{\Omega}_1$  为谐波力矩引起的激振频率参数;  $\bar{\Omega}_2$  为偏心作用引起的激振频率参数;  $\bar{k}_1$  为二次非线性刚度系数;  $\bar{k}_2$  为三次非线性刚度系数;  $\bar{c}$  为线性阻尼系数;  $\bar{F}_1$  为谐波力矩引起的激振振幅参数;  $\bar{F}_2$  为偏心作用引起的激振振幅参数;  $\eta_1$

为工作辊与轧机牌坊立柱间的线性刚度系数;  $w_0$  为参数频率。

水平振动动力平衡方程经过无量纲化处理可以写为:

$$\ddot{\bar{x}} + w_0^2 \bar{x} + \bar{c} \dot{\bar{x}} + \bar{k}_1 \bar{x}^2 + \bar{k}_2 \bar{x}^3 + g(\bar{x}) = \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 t + \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_2 t \quad (19)$$

式中:  $g(\bar{x})$  为工作辊水平方向分段刚度函数。

## 2 非线性振动响应近似解析分析

采用多尺度法对运动微分方程进行求解, 引入摄动参数  $\varepsilon$ , 将式 (19) 改写为多尺度法的一般形式:

$$\ddot{\bar{x}} + w_0^2 \bar{x} = -\varepsilon [\bar{c} \dot{\bar{x}} + \bar{k}_1 \bar{x}^2 + \bar{k}_2 \bar{x}^3 + g(\bar{x})] + \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 t + \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_2 t \quad (20)$$

式 (19) 解的形式可近似表示为:

$$\bar{x} = \bar{x}_0(T_0, T_1) + \varepsilon \bar{x}_1(T_0, T_1) \quad (21)$$

式中:  $\bar{x}_0, \bar{x}_1$  表示  $\bar{x}$  的两个解;  $T_0$  为快的时间尺度;  $T_1$  为慢的时间尺度。

定义偏微分算子  $D_n$ :

$$D_n \equiv \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (22)$$

式中:  $T_n$  为不同的时间尺度, 本文中  $n$  取 0 和 1。

将式 (20) 代入式 (19) 中, 同时引入式 (21), 合并  $\varepsilon$  阶次相同项, 可以得到:

$$\begin{cases} \varepsilon^0: D_0^2 \bar{x}_0 + w_0^2 \bar{x}_0 = \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 t + \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_2 t \\ \varepsilon^1: D_0^2 \bar{x}_1 + w_0^2 \bar{x}_1 = -2D_0 D_1 \bar{x}_0 - \bar{c} D_0 \bar{x}_0 - \bar{k}_1 \bar{x}_0^2 - \bar{k}_2 \bar{x}_0^3 - \eta_1 \bar{x}_0 \end{cases} \quad (23)$$

由式 (22) 可以得出  $\bar{x}_0$  的解为:

$$\bar{x}_0 = A(T_1) e^{i w_0 T_0} + \Lambda_1 e^{i \bar{\Omega}_1 T_0} + \Lambda_2 e^{i \bar{\Omega}_2 T_0} + cc \quad (24)$$

式中:  $\Lambda_1 = \frac{\bar{F}_1}{2(w_0^2 - \bar{\Omega}_1^2)}$ ;  $\Lambda_2 = \frac{\bar{F}_2}{2(w_0^2 - \bar{\Omega}_2^2)}$ ;  $cc$  为前项的共轭。

将式 (24) 代入式 (23) 中, 可以得到多种共振形式, 并根据所求频响函数, 通过改变系统参数分析参数变化对系统稳定性的影响。

以某厂 1780 四辊轧机为例, 研究轧机水平振动幅频特性, 其工艺参数、结构参数和力能参数如表 1 所示。



表 1 轧机系统主要参数

Table 1 Main parameters of rolling mill system

参数	数值
$m/\text{kg}$	$1 \times 10^5$
$e/\text{m}$	$6 \times 10^{-3}$
$\theta/\text{rad}$	0.279
$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$9.9 \times 10^8$
$k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$1.65 \times 10^9$
$k_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$1.4 \times 10^9$
$c_1/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	$8.5 \times 10^5$
$c_3/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	$1 \times 10^6$
$r/\text{m}$	0.42
$a_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$0.74 \times 10^6$
$a_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$1.46 \times 10^8$
$a_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$7.74 \times 10^{11}$

经计算取非线性参数的近似值为:  $w_0 = 1\bar{c} = 0.1$ ,  $\bar{k}_1 = 0.1$ ,  $\bar{k}_2 = 0.2$ ,  $\eta_1 = 0.14$ ,  $\bar{F}_1 = 1$ ,  $\bar{F}_2 = 0.8$ , 分别研究参数变化对系统主共振、超谐波共振以及次谐波共振幅频特性曲线的影响。

## 2.1 主共振

考虑系统主共振情况, 记  $\bar{\Omega}_1 = w_0 + \varepsilon\sigma$ ,  $\bar{\Omega}_2 = w_0 + \varepsilon\sigma$ , 其中  $\sigma$  为调谐参数。当振动类型为主共振时, 将谐波力矩和辊系偏心对系统的作用视为弱激励项。因此, 式 (23) 可改写为:

$$\begin{cases} \varepsilon^0: D_0^2 \bar{x}_0 + w_0^2 \bar{x}_0 = 0 \\ \varepsilon^1: D_0^2 \bar{x}_1 + w_0^2 \bar{x}_1 = -2D_0 D_1 \bar{x}_0 - \bar{c} D_0 \bar{x}_0 - \bar{k}_1 \bar{x}_0^2 - \\ \quad \eta_1 \bar{x}_0 - \bar{k}_2 \bar{x}_0^3 + \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 t + \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_2 t \end{cases} \quad (25)$$

由式 (25) 可以得出  $\bar{x}_0$  的解为:

$$\bar{x}_0 = A(T_1) e^{i w_0 T_0} + cc \quad (26)$$

将式 (26) 代入式 (24) 中, 同时消除长期项可得:

$$-2D_1 A i w_0 - \bar{c} A i w_0 - 3\bar{k}_2 A^2 \bar{A} - \eta_1 A + \frac{\bar{F}}{2} e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (27)$$

式中:  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ;  $\bar{A}$  为  $A$  的共轭;  $i$  为虚数。

$A$  具有以下极坐标形式:

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta_1(T_1)} \quad (28)$$

式中:  $a$  为量纲幅值;  $\beta_1$  为频率修正系数。

将式 (28) 代入式 (27) 中:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2} a \bar{c} + \frac{\bar{F}}{2w_0} \sin \Omega \\ a \dot{\Omega} = a\sigma - \frac{3}{8w_0} a^3 \bar{k}_2 - \frac{1}{2w_0} a \eta_1 - \frac{\bar{F}}{2w_0} \cos \Omega \end{cases} \quad (29)$$

式中:  $\Omega$  为相位,  $\Omega = \sigma T_1 - \beta_1$ ;  $\dot{\Omega}$  为相位变化率;  $\dot{a}$  为幅值变化率。

系统具有稳态解的条件为  $\dot{a} = \dot{\Omega} = 0$ , 将式 (29) 进一步整理可得:

$$\left(\frac{1}{2} \bar{c} a\right)^2 + \left(a\sigma - \frac{3}{8w_0} a^3 \bar{k}_2 - \frac{1}{2w_0} a \eta_1\right)^2 = \left(\frac{\bar{F}}{2w_0}\right)^2 \quad (30)$$

式 (30) 为系统受到谐波力矩, 辊系偏心和分段刚度等影响下的主共振幅频响应方程。与采用常规线性刚度相比, 将工作辊与轧机牌坊立柱间的刚度  $k_2$  使用分段表示, 此时  $k_2$  将不会影响系统的固有频率  $w_0$ ; 若将  $k_2$  采用常规线性刚度表达,  $k_2$  的变化将导致系统参数频率  $w_0$  发生改变, 此时主共振幅频响应方程和系统的参数频率  $w_0$  可表示为:

$$\left(\frac{1}{2} \bar{c} a\right)^2 + \left(a\sigma - \frac{3}{8w_0} a^3 \bar{k}_2\right)^2 = \left(\frac{\bar{F}}{2w_0}\right)^2 \quad (31)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3 \sin \theta + a_1}{m}} \quad (32)$$

实际上, 工作辊与轧机牌坊立柱之间的刚度  $k_2$  对系统的影响受水平振动位移  $x$  与工作辊轴承座与牌坊之间的距离  $\Delta x$  间大小关系的约束。因此, 对刚度采用分段函数表示更符合实际情况。

图 3 表示不同  $\bar{c}$  下的系统幅频曲线。随着  $\bar{c}$  增

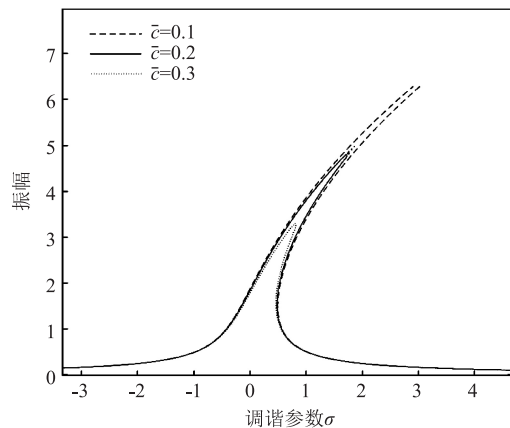


图 3  $\bar{c}$  对系统主共振幅频特性的影响  
Fig. 3 Influence of  $\bar{c}$  on main resonance amplitude-frequency characteristics for system

大, 主共振响应曲线的最大共振点向下移动, 共振区面积也有减小的趋势, 但曲线的脊骨线不会发生偏移和弯曲。

图 4 表示不同  $\bar{k}_2$  下的系统幅频曲线。从图 4 中可以看出, 主共振响应的幅值不会随  $\bar{k}_2$  的变化而发生改变, 但随着  $\bar{k}_2$  的增大, 脊骨线逐渐向右倾斜, 系统的跳跃现象变得明显。由此可见,  $\bar{k}_2$  仅影响主共振曲线脊骨线的弯曲程度, 并不影响曲线的幅值。

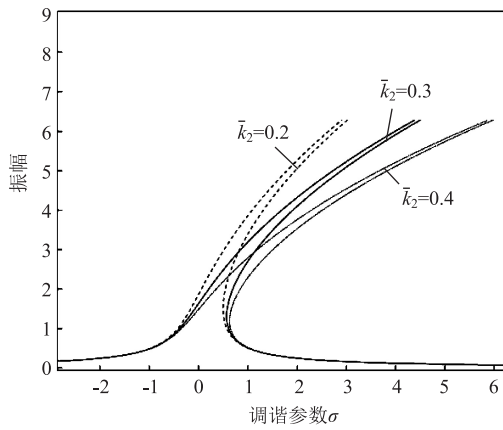


图 4  $\bar{k}_2$  对系统主共振幅频特性的影响

Fig. 4 Influence of  $\bar{k}_2$  on main resonance amplitude-frequency characteristics for system

图 5 表示不同  $\bar{F}_1$  下的系统幅频曲线。从图 5 中可以看出, 随着  $\bar{F}_1$  的增大, 振幅也会增大, 共振区域变宽, 但并不改变脊骨线的位置和弯曲程度。

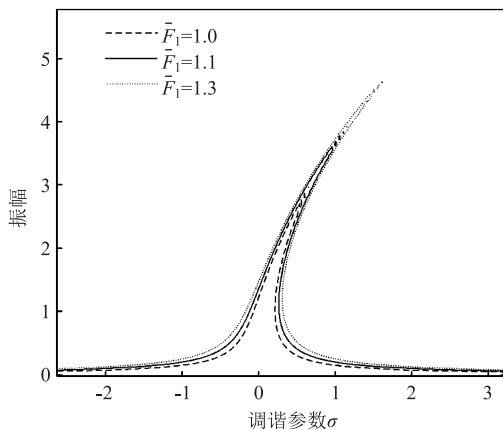


图 5  $\bar{F}_1$  对系统主共振幅频特性的影响

Fig. 5 Influence of  $\bar{F}_1$  on main resonance amplitude-frequency characteristics for system

## 2.2 超谐波共振

考虑系统 3 次超谐波共振情况, 记  $3\bar{\Omega}_1 = w_0 + \varepsilon\sigma$ ,  $3\bar{\Omega}_2 = w_0 + \varepsilon\sigma$ , 当振动类型为非主共振时, 可将谐波力矩和辊系偏心对系统的作用视为强激励项。因此, 消除式 (22) 中的长期项可得:

$$2D_1 i w_0 A + \bar{c} A i w_0 + \eta_1 A + \bar{k}_2 (3A^2 \bar{A} + 6A \Lambda_1^2 + 6A \Lambda_2^2) + \bar{k}_2 (\Lambda_1^3 + \Lambda_2^3 + 3\Lambda_1^2 \Lambda_2 + 3\Lambda_1 \Lambda_2^2) e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (33)$$

A 的极坐标形式见式 (28)。将式 (32) 代入式 (31) 中, 可得:

$$\begin{cases} \dot{a} = -H_0 a - H_1 \sin \Omega \\ -a \dot{\Omega} = H_2 a^3 + H_3 a + H_1 \cos \Omega - a \sigma \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{其中, } H_0 = \frac{1}{2} \bar{c}, \quad H_1 = \frac{\bar{k}_2}{w_0} (\Lambda_1^3 + \Lambda_2^3 + 3\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + 3\Lambda_1 \Lambda_2^2), \quad H_2 = \frac{3\bar{k}_2}{8w_0}, \quad H_3 = \frac{\bar{k}_2}{w_0} (3\Lambda_1^3 + 3\Lambda_2^3) + \frac{1}{2w_0} \eta_1.$$

系统具有稳态解的条件为  $\dot{a} = \dot{\Omega} = 0$ , 将式 (34) 进一步整理可得超谐波共振下系统幅频响应方程:

$$H_2^2 a^6 + 2(H_2 \sigma + H_2 H_3) a^4 + (H_0^2 + \sigma^2 + H_3^2 + 2H_3 \sigma) a^2 - H_1^2 = 0 \quad (35)$$

图 6 表示不同  $\bar{c}$  下的系统超谐波共振幅频曲线。在超谐波共振状态时,  $\bar{c}$  对幅频曲线的影响规律与

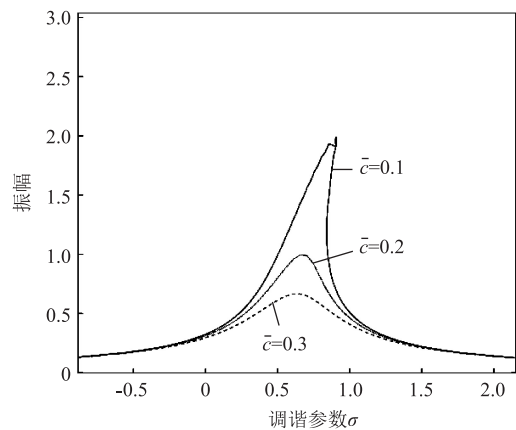


图 6  $\bar{c}$  对系统超谐波共振幅频特性的影响

Fig. 6 Influence of  $\bar{c}$  on super-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system

主共振情况相似,表现出随着  $\bar{c}$  增大,最大共振点向下移动,共振区面积也有减小的趋势。从曲线对比可以看出,  $\bar{c}$  对稳定系统状态起到了积极的作用。因此,可以通过适当调整工作辊与轧件以及和支撑辊间的阻尼来提高系统整体抗振能力。

图 7 表示不同  $\bar{k}_2$  下的系统超谐波共振幅频曲线。在超谐波共振中,随着  $\bar{k}_2$  增大,脊骨线向右发生偏移,曲线跳跃现象明显。与主共振情况不同的是,在超谐波共振下,  $\bar{k}_2$  的增大会使最大共振点向上移动。可见轧制力的波动会降低系统的稳定性。

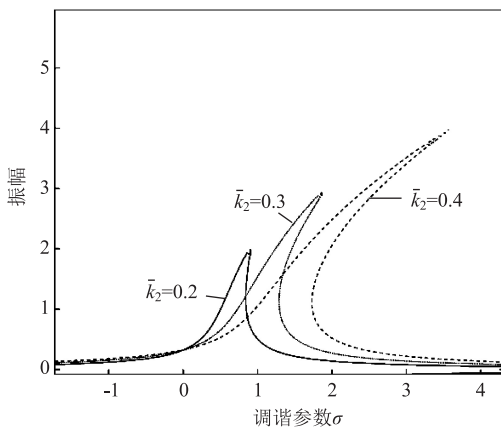


图 7  $\bar{k}_2$  对系统超谐波共振幅频特性的影响

Fig. 7 Influence of  $\bar{k}_2$  on super-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system

图 8 表示不同  $\bar{F}_1$  下的系统超谐波共振幅频曲线。在超谐波共振系统中,  $\bar{F}_1$  的增大会导致幅频特性曲线跳跃现象愈发明显,同时共振区域变宽,系

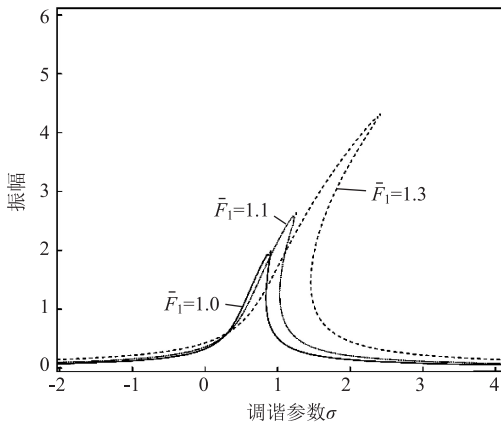


图 8  $\bar{F}_1$  对系统超谐波共振幅频特性的影响

Fig. 8 Influence of  $\bar{F}_1$  on super-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system

统的稳定性大幅降低。同时与主共振情况相比,振幅低于主共振情况下的振动幅值。因此,可以通过抑制电机中的谐波电流来提高轧机运行的稳定性。

### 2.3 亚谐波共振

考虑系统 1/3 次超谐波共振情况,记  $\bar{\Omega}_1 = 3w_0 + \varepsilon\sigma$ ,  $\bar{\Omega}_2 = 3w_0 + \varepsilon\sigma$ , 消除式 (23) 中的长期项可得:

$$2D_1 i w_0 A + \bar{c} A i w_0 + \eta_1 A + \bar{k}_2 (3A^2 \bar{\Lambda}_1 + 6A \bar{\Lambda}_1^2 + 6A \bar{\Lambda}_2^2) + \bar{k}_2 (3\bar{A}^2 \bar{\Lambda}_1 + 3\bar{A}^2 \bar{\Lambda}_2) e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (36)$$

将式 (32) 代入式 (34) 中,可得:

$$\begin{cases} \dot{a} = -H_0 a - H_1 a^2 \sin \Omega \\ -a \dot{\Omega} = H_2 a^3 + H_3 a + H_1 a^2 \cos \Omega - \sigma a \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{其中, } H_0 = \frac{1}{2} \bar{c}, \quad H_1 = \frac{\bar{k}_2}{w_0} (3\bar{\Lambda}_1 + 3\bar{\Lambda}_2), \quad H_2 =$$

$$\frac{3\bar{k}_2}{8w_0}, \quad H_3 = \frac{\bar{k}_2}{w_0} (3\bar{\Lambda}_1^2 + 3\bar{\Lambda}_2^2) + \frac{1}{2w_0} \eta_1.$$

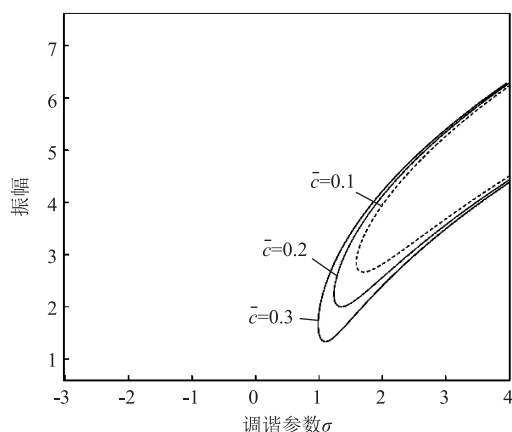
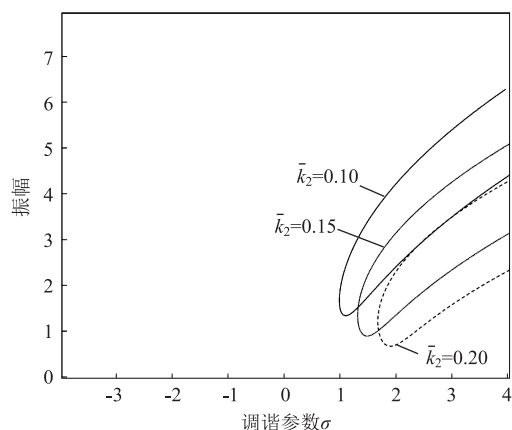
系统具有稳态解的条件为  $\dot{a} = \dot{\Omega} = 0$ , 将式 (37) 进一步整理可得亚谐波共振下系统幅频响应方程:

$$H_2 a^6 + 2(H_2 H_3 - H_2 \sigma - 2H_1^2) a^4 + (H_0^2 + H_3^2 + \sigma^2 - 2H_3 \sigma) a^2 = 0 \quad (38)$$

图 9 表示不同  $\bar{c}$  下的系统亚谐波共振幅频曲线,在亚谐波共振状态下,  $\bar{c}$  的增大会减小曲线的振幅和共振区域,但同样不会影响脊骨线的位置和弯曲程度。

图 10 为不同  $\bar{k}_2$  下的系统亚谐波共振幅频曲线,在亚谐波共振中,随着  $\bar{k}_2$  逐渐增大,系统振动峰值逐渐减小。与主共振情况不同的是,在亚谐波共振中  $\bar{k}_2$  的变化会改变响应振幅的大小。

图 11 为不同  $\bar{F}_1$  下的系统亚谐波共振幅频曲线,在亚谐波共振系统中,随着  $\bar{F}_1$  增大,曲线振幅增大,但变化量微小。可见谐波电流对主共振、超谐波共振和亚谐波共振的影响规律是一致的。

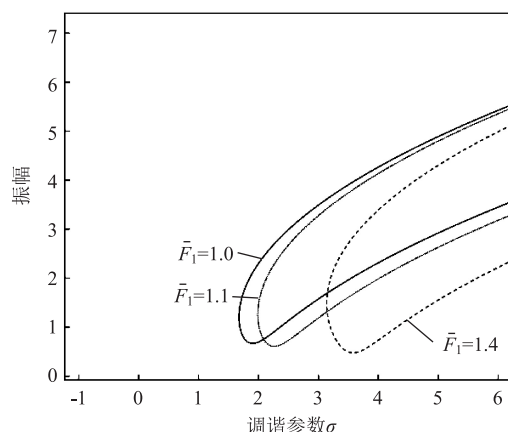
图 9  $\bar{c}$  对系统亚谐波共振幅频特性的影响Fig. 9 Influence of  $\bar{c}$  on sub-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system图 10  $\bar{k}_2$  对系统亚谐波共振幅频特性的影响Fig. 10 Influence of  $\bar{k}_2$  on sub-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system

### 3 非线性振动响应数值仿真分析

为进一步分析谐波力矩和轧辊偏心对工作辊稳定性的影响, 采用 Runge-Kuta 方法对式 (19) 进行数值求解。

图 12a 和图 12b 为系统在仅受到谐波力矩影响下 ( $\bar{F}_1 = 1$ ,  $\bar{\Omega}_1 = 1$ ), 系统的时域图和相平面图, 可以看到, 系统的运动状态比较稳定, 相轨迹是围绕两个焦点之一做倍周期运动; 如图 12c 和图 12d 所示, 随着轧辊偏心力 ( $\bar{F}_2 = 1$ ,  $\bar{\Omega}_2 = 1.5$ ) 的加入, 系统的稳定性明显降低, 可以清楚地看到混沌运动的轨迹不断地围绕着两个焦点来回跳动。

图 13a 为工作辊仅受到  $\bar{F}_1$  作用时系统全局分岔

图 11  $\bar{F}_1$  对系统亚谐波共振幅频特性的影响Fig. 11 Influence of  $\bar{F}_1$  on sub-harmonic resonance amplitude-frequency characteristics for system

图, 由图 13a 可知,  $\bar{F}_1$  在  $(15 \sim 25) \times 10^6$  N 和  $(40 \sim 42) \times 10^6$  N 内系统处于混沌振动状态, 其他范围内处于周期和倍周期状态, 此时系统振动状态是比较稳定的; 当系统同时受到  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  作用时得到图 13b 所示的全局分岔图, 从图 13b 中可以看到,  $\bar{F}_1$  在  $(1 \sim 8) \times 10^6$  N 和  $(10 \sim 25) \times 10^6$  N 内系统处于混沌振动状态。随着  $\bar{F}_2$  的加入, 混沌范围明显增大, 此时系统更容易发生振动, 出现失稳现象。由此可见, 当工作辊同时受到谐波力矩和轧辊偏心作用时更容易出现失稳现象。

### 4 结论

(1) 考虑谐波力矩和轧辊偏心的影响, 建立工作辊水平振动动力学模型; 采用多尺度近似解析法得到了在谐波力矩和轧辊偏心影响下工作辊的水平方向主共振、超谐波共振和亚谐波共振的幅频特性方程, 分析了轧制过程参数和结构参数变化对系统幅频特性的影响; 同时, 对模型进行数值求解, 进一步分析了系统在同时受到电流谐波和轧辊偏心多频激励下的运动学行为。

(2) 增大谐波力矩对工作辊水平方向作用力, 发现幅频曲线的振幅和共振区域变大; 调整工作辊与轧件以及和支撑辊之间的阻尼可以有效提高系统的稳定性; 轧制力发生波动会造成系统稳定性降低。当系统同时受到谐波力矩和轧辊偏心作用的影响时, 更容易出现混沌振动状态, 诱发系统出现失稳现象。因此, 可以通过控制谐波电流和轧辊偏心来提高轧



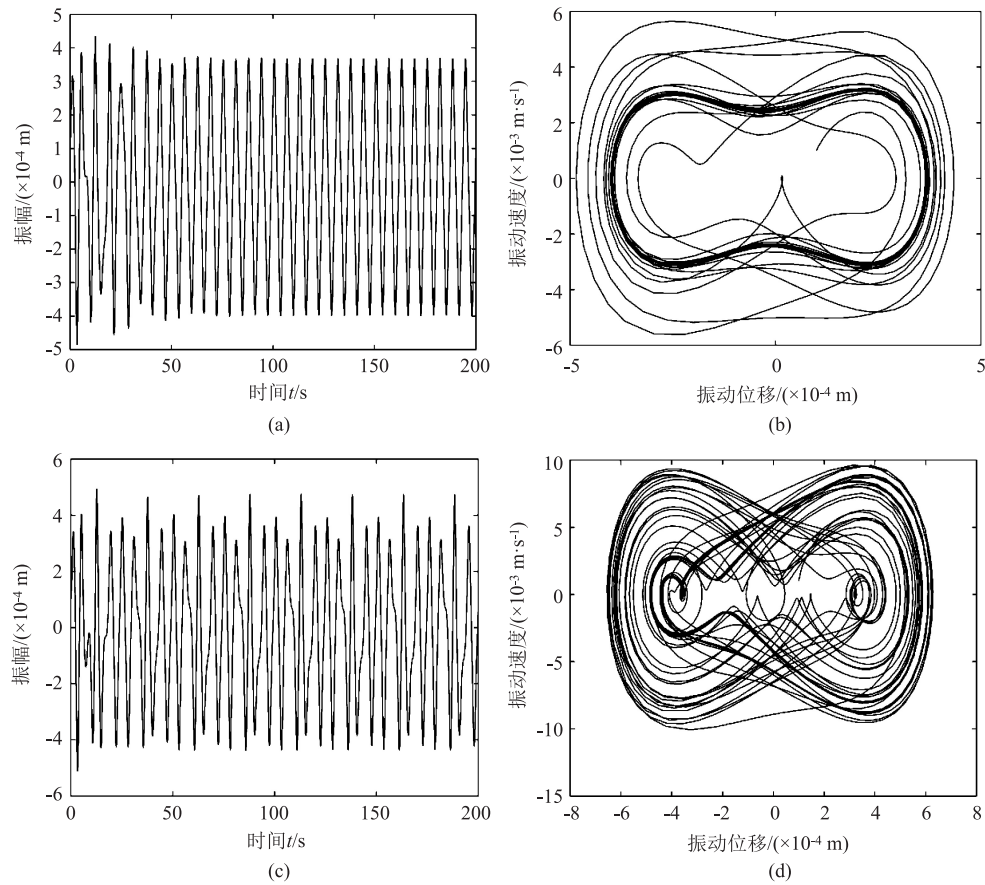


图 12 系统时域响应和相平面

(a)  $\bar{F}_1$  作用下位移响应 (b)  $\bar{F}_1$  作用下相图 (c)  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  作用下位移响应 (d)  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  作用下相图

Fig. 12 Time domain responses and phase planes for system

(a) Displacement response under  $\bar{F}_1$  (b) Phase diagram under  $\bar{F}_1$  (c) Displacement response under  $\bar{F}_1$  and  $\bar{F}_2$  (d) Phase diagram under  $\bar{F}_1$  and  $\bar{F}_2$

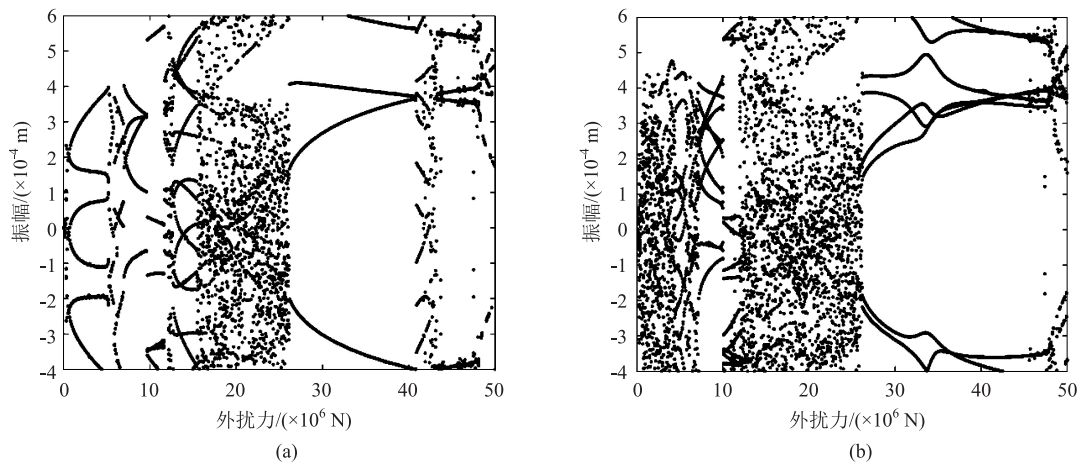


图 13 外扰力变化下工作辊全局分岔图

(a)  $\bar{F}_1$  作用下全局分岔图 (b)  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  作用下全局分岔图

Fig. 13 Global bifurcation diagrams of work roll under change of external disturbance force

(a) Global bifurcation diagram under  $\bar{F}_1$  (b) Global bifurcation diagram under  $\bar{F}_1$  and  $\bar{F}_2$

机运行的稳定性。

#### 参考文献:

- [1] Ali H, Mohammad R F. Optimization of cold rolling process parameters in order to increasing rolling speed limited by chatter vibrations [J]. Journal of Advanced Research, 2013, 4 (1): 27-34.
- [2] 张瑞成, 陈至坤, 王福斌. 单辊驱动轧机水平非线性参数激励振动机理研究 [J]. 振动与冲击, 2010, 29 (6): 105-108, 239.  
Zhang R C, Chen Z K, Wang F B. Research on the mechanism of horizontal nonlinear parametrically excited vibration of single roll drive mill [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29 (6): 105-108, 239.
- [3] Fan X B, Zang Y, Sun Y K, et al. Impact analysis of roller system stability for four-high mill horizontal vibration [J]. Shock and Vibration, 2016, (5): 1-10.
- [4] 张明, 彭艳, 孙建亮, 等. 考虑上/下工作辊非对称运动的热轧机水平振动研究 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2017, 48 (12): 3239-3247.  
Zhang M, Peng Y, Sun J L, et al. Horizontal vibration in hot tandem rolling mill considering asymmetric movement of upper and lower work rolls [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2017, 48 (12): 3239-3247.
- [5] 王运涛, 王磊, 田杰宇. 基于动态摩擦和分段刚度的热轧机水平振动行为分析 [J]. 锻压技术, 2022, 47 (4): 200-206, 226.  
Wang Y T, Wang L, Tian J Y. Analysis on horizontal vibration behavior of hot rolling mill based on dynamic friction and piecewise stiffness [J]. Forging & Stamping Technology, 2022, 47 (4): 200-206, 226.
- [6] 孙建亮, 彭艳, 高亚南, 等. 热连轧机水平振动仿真与实验研究 [J]. 中南大学学报, 2015, 46 (12): 4497-4503.  
Sun J L, Peng Y, Gao Y N, et al. Simulation and experiment of horizontal vibration of hot tandem rolling mill [J]. Journal of Central South University, 2015, 46 (12): 4497-4503.
- [7] 闫晓强, 杨喜恩, 吴先峰. 轧机水平振动侧向液压振动抑制器抑振效果仿真研究 [J]. 振动与冲击, 2013, 32 (24): 11-14.  
Yan X Q, Yang X E, Wu X F. A simulation for hydraulic device vibration-suppression effect on a rolling mill lateral vibration [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32 (24): 11-14.
- [8] Tang H P, Wang D Y, Zhong J. Investigation into the electromechanical coupling instability of a rolling mill [J]. Journal of Materials Processing Tech., 2002, 129 (1): 294-298.
- [9] 张义方, 闫晓强, 凌启辉. 负载谐波诱发轧机主传动机电耦合扭振仿真研究 [J]. 工程力学, 2015, 32 (1): 213-217, 225.  
Zhang Y F, Yan X Q, Ling Q H. Simulation research of electromechanical coupling torsional vibration for mill main drive system induced by load harmonics [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32 (1): 213-217, 225.
- [10] 刘爽, 张业宽, 刘彬. 轧机主传动机电耦联扭振系统的动态分岔研究 [J]. 机械工程学报, 2010, 46 (3): 83-89.  
Liu S, Zhang Y K, Liu B. Dynamical bifurcation study on electromechanical coupling vibration in rolling mill's drive system [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46 (3): 83-89.
- [11] 张瑞成, 卓丛林. 考虑磁参数影响的轧机主传动系统机电耦合振动特性研究 [J]. 机械设计与制造, 2015, (8): 128-132.  
Zhang R C, Zhuo C L. Study on the vibration characteristics of the electromechanical coupling in the main drive system of rolling mill with impacts of the magnetic parameters [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015, (8): 128-132.
- [12] 毛钰, 左曙光, 邓文哲, 等. 基于实测相电流的永磁同步电机转矩波动阶次来源分析及幅值预测 [J]. 振动与冲击, 2018, 37 (15): 239-245.  
Mao Y, Zuo S G, Deng W Z, et al. Order analysis and amplitude prediction of torque ripple in hub permanent magnet synchronous motors based on measured phase current [J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37 (15): 239-245.
- [13] 赵武, 张鸿斌, 孙超凡, 等. 三次方阻尼和间隙变化下的冷轧垂直颤振研究 [J]. 振动与冲击, 2021, 40 (24): 82-89, 98.  
Zhao W, Zhang H B, Sun C F, et al. A study on vertical flutter of cold rolling mill with cubic damping and gap variation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40 (24): 82-89, 98.
- [14] 彭荣荣. 动态轧制过程下轧机辊系分岔与混沌特性 [J]. 机械设计与制造, 2015, (6): 75-79.  
Peng R R. Horizontal vibration of hot rolling mill and its relationship with rolling parameters [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015, (6): 75-79.
- [15] 李丽, 郝宇超, 李震, 等. 冷连轧机多种水平共振状态特性对比研究 [J]. 锻压技术, 2021, 46 (10): 168-175.  
Li L, Hao Y C, Li Z, et al. Comparative study on characteristics of multiple horizontal resonance states for tandem cold rolling mill [J]. Forging & Stamping Technology, 2021, 46 (10): 168-175.

## 《锻压技术》郑重声明

为充分尊重作者权益, 坚决抵制学术不端行为, 积极倡导优良学风, 努力为学术创新营造良好氛围, 本刊郑重声明: 对一稿多投, 重复发表, 存在署名有争议, 引用他人著述未注明出处, 抄袭、剽窃、弄虚作假, 或以上情况的变相形式等学术不端行为的文章, 坚决拒绝刊登。一经发现, 立即撤稿, 并由本刊视情节轻重给予书面警告、拒绝刊登有其署名的稿件、通知其所在单位等处理。轻者给予3~5年不允许刊发其论文的处罚, 情节严重者, 将以适当方式予以公布, 该作者的论文永久不得刊用。

《锻压技术》编辑部