

挤压与拉拔

拉拔自激振动方程及其数值算法分析

曹益忠^{1,2}, 袁 豪¹, 哈 达^{1,2}, 张卫荣^{1,2}, 冯金刚^{1,2}

(1. 太原理工大学 机械与运载工程学院, 山西 太原 030024;

2. 先进金属复合材料成形技术与装备教育部工程研究中心, 山西 太原 030024)

摘要: 针对拉拔加工过程中常发生“追逐”或“跳跃”现象并诱发产生振动的问题, 根据丁文镜教授提出的机械系统追逐现象微分控制方程, 建立了拉拔自激振动的时变质量非线性微分控制方程, 并利用移位的 Chebyshev 多项式函数对建立的微分方程进行数值求解。另外, 给出 3 个具体的工况模拟问题, 每个问题分别考虑了不同的阻尼系数、刚度系数、变质量函数和摩擦力, 并绘制了相应的无量纲位移图和相图, 通过数值仿真研究了质量模块和摩擦力分别变化时对拉拔过程的影响。结果表明: 摩擦力呈线性或者周期性等变化时, 对拉拔过程的振动位移产生较大的影响, 而质量模块变化不会对拉拔结果产生影响。

关键词: 机械系统追逐现象; 拉拔; 质量模块; 摩擦力; 振动

DOI: 10.13330/j.issn.1000-3940.2024.05.010

中图分类号: TH123+.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-3940 (2024) 05-0076-08

Analysis on drawing self-excited vibration equation and its numerical algorithm

Cao Yizhong^{1,2}, Yuan Hao¹, Ha Da^{1,2}, Zhang Weirong^{1,2}, Feng Jingang^{1,2}

(1. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China;

2. Engineering Research Center of Advanced Metal Composites Forming Technology and Equipment, Ministry of Education, Taiyuan 030024, China)

Abstract: For the problem of vibration induced by “hunting” or “jumping” phenomenon in the process of drawing, the time-varying mass nonlinear differential control equation of self-excited vibration of drawing was established according to the differential control equation of hunting phenomenon proposed by Professor Ding Wenjing, and the differential equation was solved numerically by the shifted Chebyshev polynomial function. Then, three specific simulation problems of actual working conditions were given, and for each problem, different damping coefficients, stiffness coefficients, variable mass functions and friction forces were respectively considered. Furthermore, corresponding dimensionless displacement diagram and phase diagram were drawn, and the influences of mass module and friction force on the drawing process were studied by numerical simulation. The results show that when the friction force exhibits linear or periodic changes, it has a significant impact on the vibration displacement during the drawing process, while the change of mass module has not affect the drawing result.

Key words: hunting phenomena of mechanical systems; drawing; mass module; friction force; vibration

自然界和工程领域存在的自激振动是不需要外力激励, 也不需要外界作用改变系统的结构参数, 而是依靠系统内部各个组成部分相互作用以维持稳态周期运动^[1]。有些自激振动非常复杂。例如, 人的血液循环系统是极其复杂的自激振动系统, 心脏按照一定的频率和强度振动, 保持血管内血液流动, 就是一种典型的自激振动现象。

机械系统的追逐 (Hunting) 现象, 存在于强摩

擦力作用的低速传动系统, 时常出现忽停忽动的非均匀运动现象。有些文献称其为粘滑 (Stick-slip), 或跳跃。这种追逐现象, 是机械系统自激振动产生的主要原因, 一旦出现追逐现象机械传动会变得不平稳, 也就无法实现精确测量和精密加工。为了有效地预防追逐现象, 应对其进行分析研究。若要获得定量的结果, 不仅要建立单自由度的简化力学模型, 而且要对摩擦力作定量的描述。

钢绞线拉拔技术的发展具有悠久的历史^[2], 公元 10 世纪之前, 已经可以制造出各类金属线; 12 世纪出现锻线工和拉线工; 13 世纪中叶, 德国首先制造了水力拉拔机, 并在世界上不断推广, 使拉拔

收稿日期: 2024-01-04; 修订日期: 2024-04-13

基金项目: 国家重点研发计划 (2018YFA0707300)

作者简介: 曹益忠 (1982-), 男, 硕士, 研究员

E-mail: cccyz2008@126.com

加工进入机械化时代。后出现连续拉拔机、合金钢模超声波拉拔机。线材加工采用拉拔机, 当减面率、拉拔速度及润滑状况参量选择不当时便出现追逐或跳跃现象, 线材表面质量不光滑等弊端, 发出尖叫噪音, 导致拉拔发生机颤振事故。

另外, 针对轧机颤振及振动问题国内外学者也进行了大量研究, 在国内主要集中在中南大学、北京科技大学、东北大学、燕山大学及武汉大学等。中南大学钟掘院士等^[3]应用非线性力学模型建立了轧辊水平振动的非线性动力学方程, 定性分析了轧辊水平运动的动力学特性。东北大学侯东晓等^[4]基于 Orowan 变形区力平衡理论建立了垂直和水平方向的轧制动态模型, 在此基础上考虑了轧机结构性振动动力学模型。北京科技大学闫晓强^[5]通过理论和仿真研究确定轧机的振动性质为机电液多态耦合振动, 并对电气传动控制系统和压下系统进行参数修改和优化, 有效地抑制了轧机机电液耦合振动现象。北京科技大学邵志英等^[6]基于 Slab 分析法建立了轧制过程的稳态轧制模型, 并考虑了辊缝波动量的准静态模型以及同时考虑辊缝波动及其波动速度的动态轧制模型。武汉大学李友荣等^[7]通过将轧机主传动系统简化为两固有频率相同的单自由度系统建立扭振模型的非线性动力学方程, 进而用渐进法求解动力学方程。燕山大学彭艳等^[8]针对迁安钢厂 1580 热连轧机 F2 精轧机在轧制薄规格产品时频繁出现的异常振动现象, 组织了对其扭振、垂振及水平振动的综合测试。杨乃斌^[9]采用有限元方法分析了四辊轧机的震颤和自激振动。鲁晓燕等^[10]研究了 1420 冷连轧机的自激振动现象, 建立了轧辊的数学模型, 并运用多尺度摄动法进行求解, 提出解决自激振动的方法。郝淑英等^[11]针对锥形模短芯棒冷拔钢管过程中产生的抖纹的机理及条件进行了深入的理论分析。Erdbrink C D 等^[12]采用微分演化 (Differential Evolution Method) 辨识二阶时间信号自激振动方程的微分系数。

拉拔加工过程中常发生“追逐”或“跳跃”现象, 随之产生振动, 引发拉拔过程颤振事故, 对产品质量和拉拔设备造成严重后果。基于丁文镜教授^[1]提出的机械系统追逐现象常质量滑块微分控制方程, 结合拉拔长件塑性加工特点建立了拉拔自激振动的时变质量块非线性微分控制方程, 并利用移位的 Chebyshev 多项式函数方法求解非线性方程振动位移数值解。

1 机械系统追逐现象力学模型

丁文镜教授^[13]对机械系统追逐现象定义的常质量滑块运动模型可描述为图 1, 其中 u_0 为驱动端的位移, u 为滑块的位移, Q 为驱动端, M 为滑块, m 为滑块质量, c 为阻尼系数, k 为刚度系数。

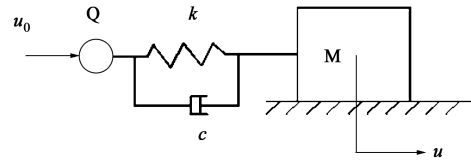


图 1 常质量滑块追逐现象模型

Fig. 1 Model of constant mass slider hunting phenomenon

滑块 M 的运动方程为:

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_0) - \varphi(\dot{u}) + k(u - u_0) = 0 \quad (1)$$

式中: $\varphi(\dot{u})$ 为摩擦力; \dot{u} 为滑块的运动速度; \ddot{u} 为滑块的运动加速度; \dot{u}_0 为驱动端的运动速度; u_0 为驱动端的位移。

若对滑块恒速驱动, 设驱动速度为 v , 则驱动端 Q 的位移 $u_0 = vt$, t 为时间。

引入无因次时间 τ_0 , 定义无因次位移 x 和阻尼比 ξ , 令 $\tau_0 = \omega_0 t$, 则:

$$x = \frac{\omega_0 x_1}{v} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3)$$

式中: x_1 为初始位移; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

由式 (2) 和式 (3) 可知, 滑块运动方程可简化为:

$$x'' + 2\xi x' + x - \frac{\varphi[(x' + 1)v]}{m\omega_0 v} = 0 \quad (4)$$

式中: x' 和 x'' 分别为 x 对 τ 的一阶和二阶导数; φ 为质量系数。

采用卡诺普摩擦力模型描述摩擦力 $\varphi[(x' + 1)v]$, 则静、动摩擦力差 ΔF 为:

$$\Delta F = F_s - F_k = \Delta\mu N \quad (5)$$

$$\Delta\mu = \mu_s - \mu_k \quad (6)$$

式中: F_s 为静摩擦力; F_k 为动摩擦力; $\Delta\mu$ 为静、动摩擦系数差; N 为正压力; μ_s 为静摩擦因数; μ_k 为动摩擦因数。

定义无因次动摩擦因数 f_s 和无因次静、动摩擦因数差 d :

$$f_s = \frac{\mu_k N}{m\omega_0 v} \quad (7)$$

$$d = \frac{\Delta\mu N}{m\omega_0 V} \quad (8)$$

式中: V 为滑块体积系数。

则滑块运动方程再次简化为:

$$x'' + 2\xi x' + x = -f_s \cdot \text{sgn}(x' + 1) \quad (9)$$

式 (9) 中 $\text{sgn}(x)$ 为符号函数, 即:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (10)$$

此方程式 (9) 由齐次方程的通解和非齐次方程的特解组成。

2 拉拔自激振动力学模型

2.1 拉拔自激振动力学模型建立

本文基于清华大学丁文镜教授^[1] 提出的常质

量滑块运动方程, 结合拉拔长件塑性加工特点^[14], 认为原滑块被拉出后下一金属充当滑块, 由连着的原滑块的运动同时带动后滑块的运动, 进而形成了变质量滑块运动, 如图 2 所示, 其中 σ_l 为轴向拉应力, σ_r 为径向压应力, σ_θ 为周向压应力, ε_l 为轴向应变, ε_r 为径向应变, ε_θ 为周向应变, α 为摩擦力与轴向夹角, P 为拉拔力, dN 为单位正压力, dT 为单位摩擦力, N 为正应力方向、 R 为径向、 T 为切应力方向。以此建立了拉拔自激振动滑块的变质量微分控制模型 (图 3), 并利用移位的 Chebyshev 多项式函数方法获取相应的数值解。

变质量滑块 M 的运动方程可表示为:

$$m(t)\dot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_0) - \varphi(\dot{u}) + k(u - u_0) = 0 \quad (11)$$

式中: $m(t)$ 为滑块变质量。

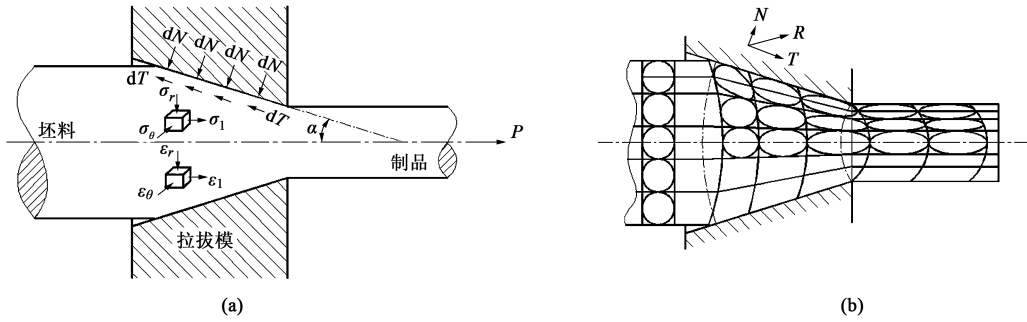


图 2 拉拔塑性加工过程

(a) 坯料拉拔内部受力情况 (b) 变质量滑动模型

Fig. 2 Plastic processing process of drawing

(a) Internal force condition of blank drawing (b) Variable mass sliding model

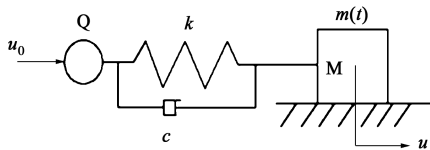


图 3 拉拔自激振动变质量模型

Fig. 3 Model of variable mass for drawing self-excited vibration

得到变质量系统阻尼比 $\xi(\tau_0)$ 为:

$$\xi(\tau_0) = \frac{c}{2\sqrt{km(\tau_0)}} \quad (12)$$

则变质量滑块运动方程简化为:

$$x'' + 2\xi(t)x' + x - \frac{\varphi[(x' + 1)v]}{m(t)\omega_0 v} = 0 \quad (13)$$

定义无因次动摩擦因数 $f_s(t)$ 和无因次静、动摩擦因数差 $d(t)$ 为:

$$f_s(t) = \frac{\mu_k N}{m(t)\omega_0 V} \quad (14)$$

$$d(t) = \frac{\Delta\mu N}{m(t)\omega_0 V} \quad (15)$$

则变质量滑块运动方程可再次简化为:

$$x'' + 2\xi(t)x' + x = -f_s(t)\text{sgn}(x' + 1) \quad (16)$$

此方程式 (16) 由齐次方程的通解和非齐次方程的特解组成。

2.2 拉拔自激振动方程算法研究

针对建立的拉拔自激振动变质量微分控制方程, 提出相应的数值求解算法。这里给出上述模型的一般形式:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi(t)\dot{x}(t) + x(t) - f_s(t) = 0 \quad (17)$$

2.2.1 移位的 Chebyshev 多项式

定义在区间 $[0, L]$ 上的 i 阶移位的 Chebyshev

多项式 $T_{L,i}(t)$ 可表示为^[15]:

$$T_{L,i}(t) = i \sum_{\zeta=0}^i (-1)^{i-\zeta} \frac{(i+\zeta-1)!}{(i-\zeta)! (2\zeta)!} \frac{2^{2\zeta}}{L^\zeta} \cdot t^\zeta \quad (18)$$

式中: $T_{L,i}(0) = (-1)^i$ 且 $T_{L,i}(1) = 1$; L 为区间的上限值。

正交性:

$$\begin{cases} \int_0^L T_{L,j}(t) T_{L,\zeta}(t) w_L(t) dt = h_\zeta \\ h_\zeta = \begin{cases} \frac{b_\zeta}{2} \cdot \pi, & \zeta = j \\ 0, & \zeta \neq j \end{cases}, b_\zeta = 1, \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

式中: 权函数 $w_L(t) = \frac{1}{\sqrt{Lt-t^2}}$; b_ζ 为给定初值; j 为

计算阈值。

2.2.2 函数逼近

任意函数 $x(t) \in L^2[0, L]$, 均可由移位的 Chebyshev 多项式近似表示为^[16]:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^U x_i T_{L,i}(t) = \mathbf{x}^T \mathbf{\Phi}(t) \quad (20)$$

式中: 系数 $x_i = \frac{1}{h_1} \int_0^L x(t) T_{L,i}(t) w_L(t) dt$; $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_U]^T$; $\mathbf{\Phi}(t) = [T_{L,0}(t), T_{L,1}(t), \dots, T_{L,U}(t)]^T$; U 为上极限取值。

向量 $\mathbf{\Phi}(t)$ 的一阶导数可表示为^[17]:

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{\Phi}(t) \quad (21)$$

式 (21) 中的 $\mathbf{P}^{(1)}$ 是 $(U+1) \times (U+1)$ 维的微分算子矩阵, 给出形式如下:

$$\mathbf{P}^{(1)} = (p_{iz}) = \begin{cases} \frac{4i}{b_z}, & z = 0, 1, \dots, i+k, \\ \begin{cases} k = 1, 3, 5, \dots, U, & U \text{ 为奇数} \\ k = 1, 3, 5, \dots, U-1, & U \text{ 为偶数} \end{cases} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (22)$$

式中: b_z 为计算因子。

向量 $\mathbf{\Phi}(t)$ 的二阶导数可表示为:

$$\frac{d^2 \mathbf{\Phi}(t)}{dt^2} = (\mathbf{P}^{(1)})^2 \mathbf{\Phi}(t) \quad (23)$$

2.2.3 乘积算子矩阵

下面讨论两个向量的乘积算子矩阵^[18]:

$$\mathbf{\Phi}(t) \mathbf{\Phi}^T(t) \mathbf{x} \approx \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{\Phi}(t) \quad (24)$$

式中: $\tilde{\mathbf{x}}$ 为 \mathbf{x} 的共轭。

2.2.4 求解方法

由式 (20)~式 (23) 可得^[11]:

$$\mathbf{x}'' \approx \left[\frac{d^2 \mathbf{\Phi}(t)}{dt^2} \right]^T \mathbf{x} \approx \mathbf{\Phi}(t)^T (\mathbf{P}^{(2)})^T \mathbf{x} \quad (25)$$

$$\xi(t) \mathbf{x}' \approx \xi \mathbf{\Phi}(x) \left[\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt} \right]^T \mathbf{x} \approx \xi \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{\Phi}(t)^T \quad (26)$$

$$(\mathbf{P}^{(1)})^T \mathbf{x} \approx \mathbf{\Phi}(t)^T \xi^T (\mathbf{P}^{(1)})^T \mathbf{x} \quad (27)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{\Phi}(t)^T \mathbf{x} \quad (28)$$

$$f(x) \approx \mathbf{\Phi}(t)^T \mathbf{f} \quad (29)$$

式中: \mathbf{x} , ξ 和 \mathbf{f} 为系数矩阵; ξ 为系数矩阵 ξ 的共轭。

将式 (25)~式 (29) 代入式 (17) 中, 得:

$$\begin{aligned} & \mathbf{\Phi}(t)^T (\mathbf{P}^{(2)})^T \mathbf{x} + \mathbf{\Phi}(t)^T \xi^T (\mathbf{P}^{(1)})^T \mathbf{x} + \\ & \mathbf{\Phi}(t)^T \mathbf{x} - \mathbf{\Phi}(t)^T \mathbf{f} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

通过求解式 (30), 可得系数矩阵 \mathbf{x} , 然后将其代入式 (20) 中, 即得原问题的数值解。

3 拉拔自激振动变质量模型数值仿真

通过几个具体的拉拔工况模拟问题探讨阻尼系数、刚度系数、变质量函数和摩擦力函数分别取不同值时, 利用上述方法获取拉拔自激振动非线性微分方程的振动位移数值解。

(1) 模拟工况 1: 取阻尼系数 $c=0.1$, 刚度系数 $k=2 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{kg}$, 质量 m 分别为 $0.5 \sin(t)+1$ 和 1 kg , 摩擦力 $f=0.5 \text{ N}$ 。将所得的拉拔振动无量纲位移数值解和相图分别见图 4 和图 5, 分别计算阻尼比。

$$\xi(t) = \frac{c}{2\sqrt{km(t)}} = \frac{0.1}{2\sqrt{2 \times 10^3 \times [0.5 \sin(t) + 1]}} \approx \frac{0.0011}{\sqrt{0.5 \sin(t) + 1}} \ll 1 \quad (31)$$

$$\xi(t) = \frac{c}{2\sqrt{km(t)}} = \frac{0.1}{2\sqrt{2 \times 10^3}} \approx 0.0011 \ll 1 \quad (32)$$

通过计算不同质量下的阻尼比, 发现结果均小于 1, 又因在本工况下摩擦力是给定的恒定摩擦力, 所以, 该问题属于阻尼自由振动问题, 且为欠阻尼振动衰减系统, 与仿真结果吻合。另外, 可以发现

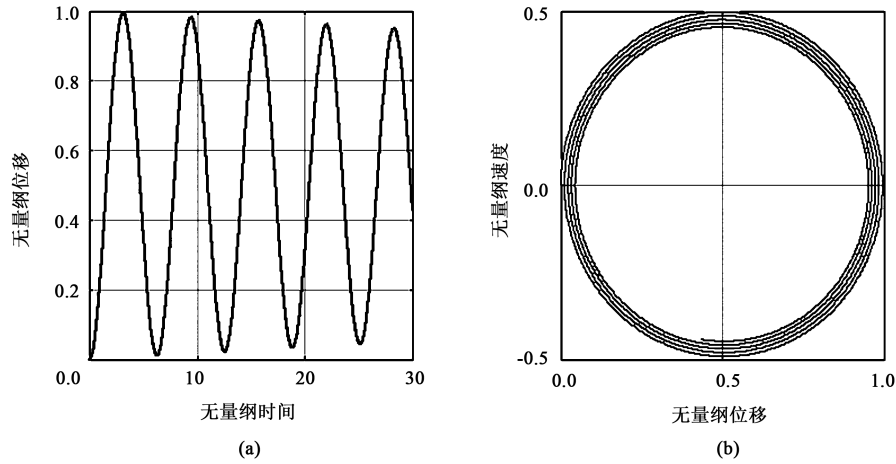


图 4 在摩擦力 $f=0.5 \text{ N}$ 、质量 $m(t)=0.5\sin(t)+1$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 4 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagram (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5 \text{ N}$, $m(t)=0.5\sin(t)+1$

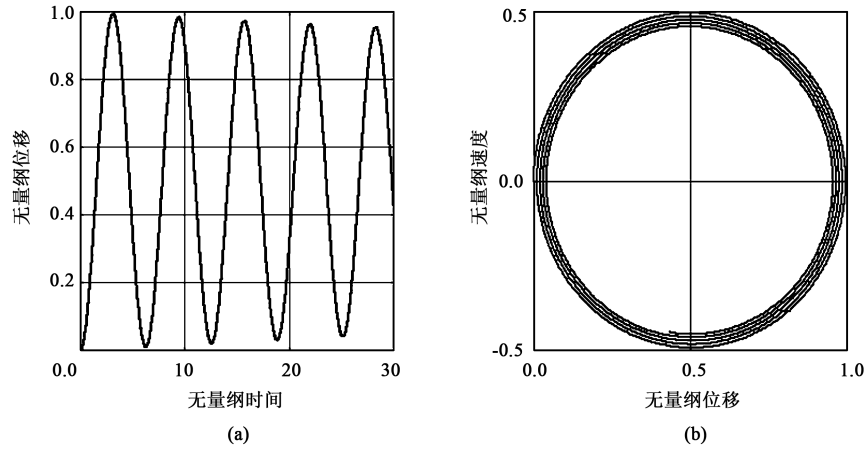


图 5 摩擦力 $f=0.5 \text{ N}$ ，质量 $m=1 \text{ kg}$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 5 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagram (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5 \text{ N}$, $m=1 \text{ kg}$

图 4 和图 5 很相似，这表明变质量模型和常质量模型对实际结果产生的波形是吻合的，并未对实验结果造成偏差。

(2) 模拟工况 2：取阻尼系数 $c=0.1$ ，刚度系数 $k=2\times 10^3 \text{ N} \cdot \text{kg}$ ，质量 $m=0.5 \text{ kg}$ ，摩擦力 f 分别为 $0.5\sin(t)$ 和 0.5 N 。将所得的拉拔振动无量纲位移数值解和相图分别见图 6 和图 7，计算阻尼比。

$$\xi(t) = \frac{c}{2\sqrt{km(t)}} = \frac{0.1}{2\sqrt{2 \times 10^3 \times 0.5}} \approx 0.0016 \ll 1 \quad (33)$$

通过计算阻尼比，发现阻尼比远小于 1，但是图 6 和图 7 出现两种截然不同的波形，主要源于不

同的摩擦力。当拉拔过程受到周期性摩擦力时，看作该系统受到周期性外力激励，属于受迫振动，随之产生了共振，就形成如图 6 所示的发散波形。图 7 给出的是稳态摩擦力，这里获得的结果与工况 1 情形下的相同，均为欠阻尼衰减波形。

(3) 模拟工况 3：取阻尼系数 $c=0.3$ ，刚度系数 $k=2\times 10^3 \text{ N} \cdot \text{kg}$ ，质量 m 分别取 $2-t/100$ 和 2 kg ，摩擦力为 0.5 N 。所得的拉拔振动无量纲位移数值解和相图分别见图 8 和图 9，分别计算阻尼比。

$$\xi(t) = \frac{c}{2\sqrt{km(t)}} = \frac{0.3}{2\sqrt{2 \times 10^3 (2 - t/200)}} \approx \frac{0.0034}{\sqrt{2 - t/200}} \quad (34)$$

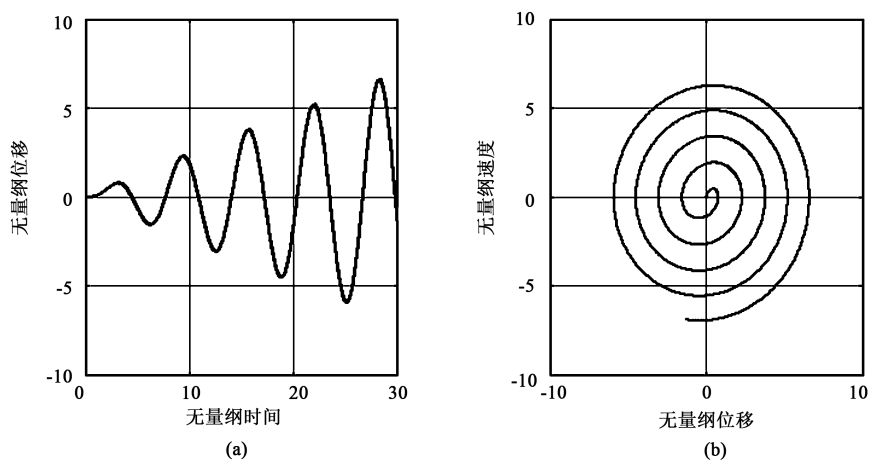


图6 摩擦力 $f=0.5\sin(t)$, 质量 $m(t)=0.5\text{ kg}$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 6 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagrams (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5\sin(t)$, $m=0.5\text{ kg}$

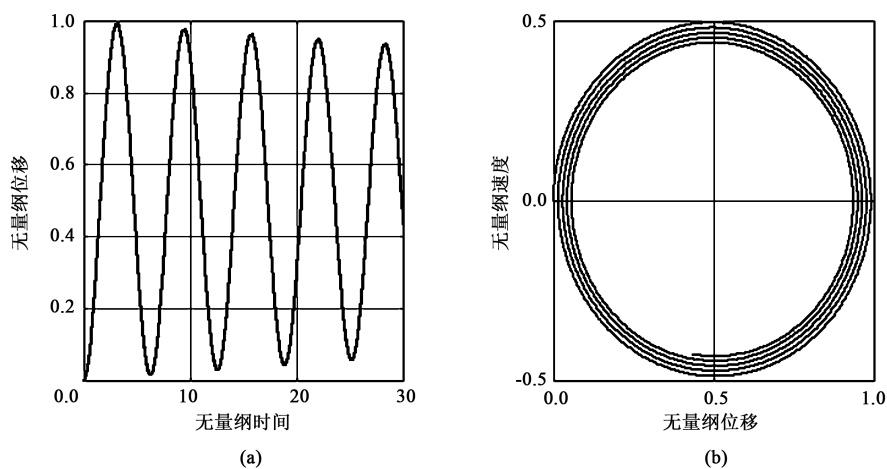


图7 摩擦力 $f=0.5\text{ N}$, 质量 $m(t)=0.5\text{ kg}$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 7 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagram (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5\text{ N}$, $m=0.5\text{ kg}$

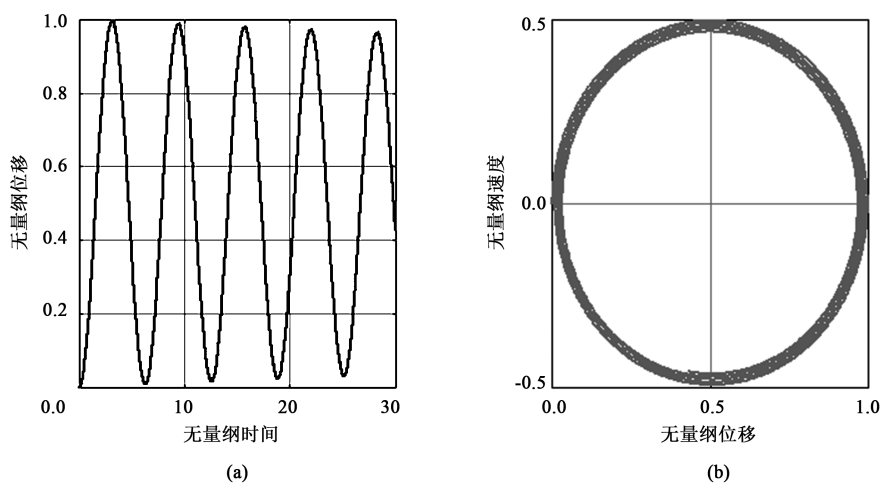


图8 摩擦力 $f=0.5\text{ N}$, 质量 $m(t)=2-t/100$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 8 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagram (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5\text{ N}$, $m=2-t/100$

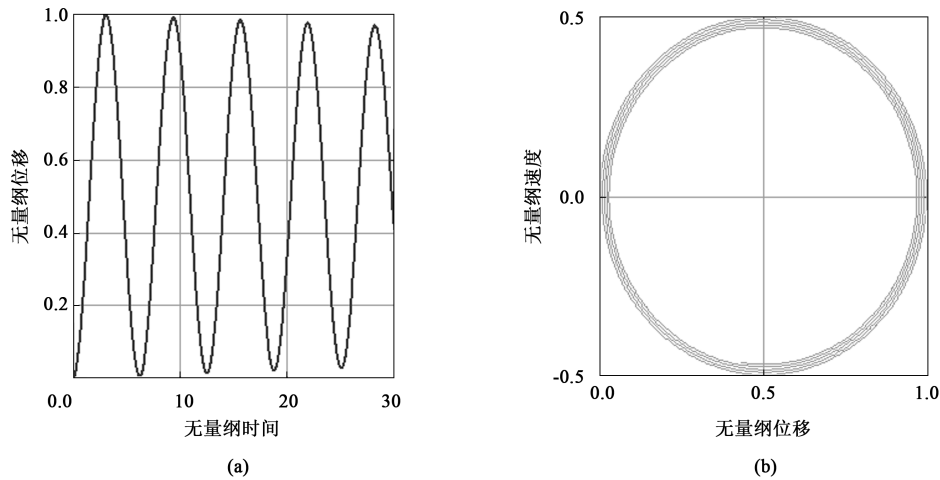


图 9 摩擦力 $f=0.5 \text{ N}$ ，质量 $m=2 \text{ kg}$ 时拉拔自激振动无量纲位移图 (a) 和无量纲相图 (b)

Fig. 9 Drawings of dimensionless displacement (a) and dimensionless phase diagram (b) for self-excited vibration when drawing under $f=0.5 \text{ N}$, $m=2 \text{ kg}$

$$\xi(t) = \frac{c}{2\sqrt{km(t)}} = \frac{0.3}{2\sqrt{2 \times 10^3 \times 2}} \approx 0.0024 \ll 1 \quad (35)$$

图 8 和图 9 讨论的情况类似于工况 1，给出稳态摩擦力和两种类型的质量函数，即周期性变质量函数和常质量函数，结果发现位移图和相图也相似。结合 3 种工况可以得出如果施加恒定摩擦力，拉拔自激振动产生的振动位移对于常质量函数和变质量函数是相似的，变质量函数不会对实验结果产生偏差；如果摩擦力不是恒定的，呈线性变化或者周期性变化，均会对拉拔过程振动位移产生较大的影响，随之改变波形。另外，图 4、图 5、图 7、图 8 和图 9 这几幅图的位移图和相图较为相似，主要源于这几幅图均给出相同恒定摩擦力，而且质量变化均比较小，分析各种情形下的阻尼比，发现阻尼比均为非常小的数，故而对方程振动位移数值解产生的变化非常小，导致图形相似度很高。

4 结论

(1) 基于丁文镜教授提出的机械系统追逐现象常质量滑块微分控制方程，建立了拉拔自激振动长件局部变质量微分控制方程模型，并推导了相应的数值求解算法。

(2) 通过一系列工况模拟问题对算法的可行性进行了验证，并通过数值仿真给出了无量纲时间-位移图和无量纲位移-速度图。

(3) 进一步对图像结果进行分析，通过数值模拟讨论了质量模块和摩擦力分别变化时对拉拔过程的影响，表明摩擦力呈线性或者周期性等其他变化

时，对拉拔过程振动位移产生较大影响，而质量模块变化不会对拉拔结果产生影响。

参考文献：

- [1] 丁文镜. 自激振动 [M]. 北京：清华大学出版社，2009.
Ding W J. Self-excited Vibration [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.
- [2] 杨桂瑜, 李微微, 石金英. PC 钢绞线用钢丝高速优质拉拔工艺试验 [J]. 金属制品, 2015, 41 (1): 20-24.
Yang G Y, Li W W, Shi J Y. High speed and high-quality drawing technology test for PC steel strand [J]. Metal Products, 2015, 41 (1): 20-24.
- [3] 唐华平, 钟掘. 单辊驱动轧机水平自激振动定性分析 [J]. 机械工程学报, 2001, 37 (8): 55-59.
Tang H P, Zhong J. Qualitative analysis of horizontal self-excited vibration of single-high drive mill [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37 (8): 55-59.
- [4] 侯东晓, 彭荣荣, 刘浩然. 变摩擦力下板带轧机辊系垂直-水平耦合振动特性 [J]. 东北大学学报：自然科学版, 2013, 34 (11): 98-102.
Hou D X, Peng R R, Liu H R. Vertical-horizontal coupling vibration characteristics of roll system in lower plate strip mill with variable friction [J]. Journal of Northeastern University: Natural Science Edition, 2013, 34 (11): 98-102.
- [5] 闫晓强. 热连轧机电液耦合振动控制 [J]. 机械工程学报, 2011, 47 (17): 61-65.
Yan X Q. Electromechanical hydraulic coupling vibration control of hot rolling mill [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47 (17): 61-65.
- [6] 邵志英, 臧勇, 曾令强. 轧机颤振建模及理论研究进展 [J]. 机械工程学报, 2015, 51 (16): 87-105.
Gao Z Y, Zang Y, Zeng L Q. Progress in modeling and theoretical research on mill flutter [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51 (16): 87-105.
- [7] 陈程, 李友荣. 轧制润滑对轧机主传动系统自激振动影响 [J].

- 振动与冲击, 2015, 34 (16): 161-165.
- Chen C, Li Y R. Effect of rolling lubrication on self-excited vibration of main drive system of rolling mill [J]. *Vibration and Impact*, 2015, 34 (16): 161-165.
- [8] 高亚南, 彭艳, 孙建亮, 等. 1580 热连轧机 F2 精轧机振动综合测试与分析 [J]. *钢铁*, 2013, 48 (1): 52-58.
- Gao Y N, Peng Y, Sun J L, et al. Comprehensive vibration test and analysis of F2 finishing mill for 1580 hot tandem mill [J]. *Steel & Iron*, 2013, 48 (1): 52-58.
- [9] 杨乃斌. 采用有限元方法分析轧机的振动及震颤现象 [J]. *一重技术*, 1994, (1): 139-152.
- Yang N B. Vibration and vibration of rolling mill are analyzed by finite element method [J]. *CFHI Technology*, 1994, (1): 139-152.
- [10] 鲁晓燕, 叶黔元, 瞿志豪. 一类轧机自激振动现象的分析与解决 [J]. *上海理工大学学报*, 2004, 26 (2): 141-145.
- Lu X Y, Ye Q Y, Qu Z H. Analysis and solution of self-excited vibration of a kind of rolling mill [J]. *Journal of Shanghai University of Science and Technology*, 2004, 26 (2): 141-145.
- [11] 郝淑英, 张建, 温殿英, 等. 冷拔钢管抖纹产生的机理及消除方法 [J]. *重型机械*, 2001, (6): 25-28.
- Hao S Y, Zhang J, Wen D Y, et al. The mechanism and elimination method of chattering grain of cold drawn steel pipe [J]. *Heavy Machinery*, 2001, (6): 25-28.
- [12] Erdbrink C D, Krzhizhanovskaya V V. Differential evolution for system identification of self-excited vibrations [J]. *Journal of Computational Science*, 2015, 10: 360-369.
- [13] 丁文镜. 工程中的自激振动 [M]. 长春: 吉林教育出版社, 1988.
- Ding W J. Self-excited Vibration in Engineering [M]. Changchun: Jilin Education Press, 1988.
- [14] 万景元. 钢绞线拉拔工艺参数分析及系统研究 [D]. 天津: 河北工业大学, 2015.
- Wan J Y. Analysis and Systematic Study on Drawing Process Parameters of Steel Strand [D]. Tianjin: Hebei University of Technology, 2015.
- [15] Doha E H, Bhrawy A H, Ezz-Eldien S S. A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 62 (5): 2364-2373.
- [16] Zhao F Q, Huang Q X, Xie J Q, et al. Matrix method based on the shifted Chebyshev polynomials for solving fractional-order PDEs with initial-boundary conditions [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, (2): 1114-1124.
- [17] Xie J Q, Huang Q X, Yang X. Numerical solution of the one-dimensional fractional convection diffusion equations based on Chebyshev operational matrix [J]. *Springerplus*, 2016, 5 (1): 1149.
- [18] Bhrawy A H, Doha E H, Baleanu D, et al. A spectral tau algorithm based on Jacobi operational matrix for numerical solution of time fractional diffusion-wave equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 293: 142-156.

(上接第 16 页)

- [3] Girish B M, Shivakumar B P, Hanamantraygouda M B, et al. Wear behaviour of hot forged SiC reinforced aluminium 6061 composite materials [J]. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 20 (2): 425-432.
- [4] 王绍著, 赵密, 胡茂良, 等. 近液相线挤压铸造工艺对 ADC12 铝合金支架显微组织和力学性能的影响 [J]. *中国有色金属学报*, 2015, 25 (6): 1428-1434.
- Wang S Z, Zhao M, Hu M L, et al. Influence of near-liquidus extrusion casting process on the microstructure and mechanical properties of ADC12 aluminum alloy brackets [J]. *The Chinese Journal of Nonferrous Metals*, 2015, 25 (6): 1428-1434.
- [5] 陈剑红, 肖克华. 新型铝合金建筑扣件的锻压工艺参数优化研究 [J]. *热加工工艺*, 2021, 50 (9): 98-100.
- Chen J H, Xiao K H. Optimization of forging process parameters for new type of aluminum alloy building fasteners [J]. *Hot Working Technology*, 2021, 50 (9): 98-100.
- [6] 刘记伟. 不同锻造比对 2A50 铝合金组织和性能的影响 [J]. *轻合金加工技术*, 2014, 42 (11): 54-58.
- Liu J W. Effect of different forging ratios on the microstructure and properties of 2A50 aluminum alloy [J]. *Light Alloy Processing Technology*, 2014, 42 (11): 54-58.
- [7] Prabhu T R. Modelling studies on effects of deformation speed, preform shape, and upset ratio on the forging characteristics of the aerospace structural Al alloys [J]. *International Journal of Materials and Product Technology*, 2017, 54 (4): 291-305.
- [8] 熊禹, 吉泽升, 徐丽娟. 铸锻复合对 ADC12 铝合金显微组织和性能的影响 [J]. *特种铸造及有色合金*, 2017, 37 (2): 214-217.
- Xiong Y, Ji Z S, Xu L J. Influence of casting-forging composite on the microstructure and properties of ADC12 aluminum alloy [J]. *Special Casting & Nonferrous Alloys*, 2017, 37 (2): 214-217.
- [9] Khemraj S, Dhiraj N, Manvandra K S, et al. Microstructural analysis of forged Al-11Si-2.5Cu-0.6Fe alloy at different processing conditions [J]. *Materials Today: Proceedings*, 2021, 47 (19): 6682-6685.
- [10] 周正, 杨莎, 王天琪. 铝合金轮毂锻压成形工艺及组织仿真 [J]. *机械设计*, 2021, 38 (S2): 205-208.
- Zhou Z, Yang S, Wang T Q. Forging process and structure simulation of aluminum alloy wheel hubs [J]. *Mechanical Design*, 2021, 38 (S2): 205-208.
- [11] 赵静, 周梅. 挤压速度对 6063-0.3Sr 铝合金建筑型材性能的影响 [J]. *热加工工艺*, 2021, 50 (19): 106-108.
- Zhao J, Zhou M. Influence of extrusion speed on properties of 6063-0.3Sr aluminum alloy building profiles [J]. *Hot Working Technology*, 2021, 50 (19): 106-108.
- [12] 朱晓波. 锻造工艺参数对汽车用石墨烯增强铝基复合材料的影响 [J]. *热加工工艺*, 2020, 49 (23): 80-83.
- Zhu X B. Effect of forging process parameters on aluminum matrix composites reinforced with graphene for automobile applications [J]. *Hot Working Technology*, 2020, 49 (23): 80-83.