

模面设计中复杂曲面 G1 稳定延伸算法

姚 兵, 柳玉起, 章志兵, 王 振, 张希磊

(华中科技大学 材料科学与模具技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 提出一种基于边界特征的复杂曲面延伸算法和基于曲面跨界切向的双向蒙皮曲面方法, 实现了复杂曲面稳定的 G1 延伸创建。该算法通过利用边界特征实现延伸曲面与原始曲面保持随形, 提高了曲面质量。采用蒙皮曲面和填充曲面混合方式分段构造延伸曲面, 解决了复杂曲面延伸容易产生的重叠、褶皱等问题, 提高了曲面延伸的稳定性。提出了基于曲面跨界切向的双向蒙皮曲面方法, 保证了延伸边界处曲面的 G1 连续性。基于 NX 平台开发了边界延伸功能, 实现了模具曲面边界的自动化延伸。经实际测试, 该算法具有稳定可靠、自动化程度高、曲面质量好的优点, 可有效缩短整个模面的设计周期。

关键词: 曲面延伸; 边界特征; 自动分段; 蒙皮曲面; G1 连续

DOI: 10.13330/j.issn.1000-3940.2024.08.007

中图分类号: TG386.3; TP319

文献标志码: A

文章编号: 1000-3940 (2024) 08-0047-06

G1 stable extension algorithm on complex surface in die surface design

Yao Bing, Liu Yuqi, Zhang Zhibing, Wang Zhen, Zhang Xilei

(State Key Laboratory of Material Processing and Die & Mould Technology, Huazhong
University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A complex surface extension algorithm based on boundary features and a bidirectional skinning surface method based on boundary derivatives were proposed, and the stable creation of G1 extension for complex surface was achieved. Then, the algorithm realizes the conformal relationship between extension surface and original surface by using boundary features, and the quality of surface is improved greatly. Furthermore, the extension surfaces in segments are constructed by the hybrid strategy of skin and fill surfaces to overcome the problems of overlapping and wrinkling that were prone in the complex surface extension, and the stability of extension surface is greatly improved. In addition, the bidirectional skinning surface method based on boundary derivatives was proposed to ensure G1 continuity of surface at the extension boundary. Based on platform NX, the boundary extension function was developed, and the automatic extension of die surface boundary was realized. The actual test results show that the proposed algorithm has the advantages of stability, reliability, high degree of automation, and good surface quality, which can effectively shorten the design cycle of the entire die surface.

Key words: surface extension; boundary feature; automatic segmentation; skinning surface; G1 continuity

延伸是指从零件边界向外自然延伸出曲面的过程。在飞机蒙皮和汽车覆盖件零件的生产制造过程中, 被广泛应用于模面设计, 比如工艺补充面和翻边刀块设计。延伸曲面作为直接与产品零件边界匹配的部分, 一般要求具有良好的光顺性, 并且与原曲面保持随形, 不能发生畸变^[1]。传统的曲面延伸一般由设计人员手工进行延伸, 通常会借助大型通用 CAD/CAM 软件比如 UG、CATIA 等提供的曲面延伸工具, 能根据延伸方向及延伸距离控制延伸曲面,

但飞机蒙皮和汽车覆盖件多为空间自由曲面, 形状复杂且通常是由多个曲面拼接而成的^[2], 不支持整体延伸, 而分段延伸会导致延伸曲面出现重叠、缝隙等缺陷^[3-4], 需要设计人员手工修改, 十分依赖设计人员的经验且效率低下。

对于曲面延伸问题, 有大量文献分别从理论和实际应用层面给出了不同的解决方法。Shetty S 和 White P R^[5]使用插入节点及控制点反射实现了 B 样条曲面的延伸, 且保证了边界的曲率的连续性, 但其不能保证延伸曲面不会产生自相交, 所以实际应用时限制了其延伸距离。余正生等^[6]使用节点插入技术离散曲面边界, 得到符合精度的边界点, 由边界点根据曲面边界信息, 如切向向外延伸得到延伸曲面边界点, 插值得到延伸曲面边界线, 再根据原

收稿日期: 2023-12-26; 修订日期: 2024-04-12

作者简介: 姚 兵 (1999-), 男, 硕士研究生

E-mail: m202171022@hust.edu.cn

通信作者: 章志兵 (1978-), 男, 博士, 副教授

E-mail: zhangzb@hust.edu.cn

始曲面边界线和延伸曲面边界线生成延伸曲面, 实现了 NURBS 曲面的延伸, 保证了延伸曲面不会自相交, 但延伸边界处连续要求越高, 所需的离散精度就越高, 导致效率较低且控制点数量较多。以上方法均不能较好地处理拼接曲面, 刘辉强等^[7]从实际应用角度, 提出了沿拼接曲面边界选取待延伸点, 并根据曲面边界信息计算延伸点最后构造延伸曲面的方法, 但并未处理拼接曲面延伸可能产生的重叠、缝隙等问题。何龙等^[8]提出了自动检测曲面边界上角点, 并使用角点划分曲面边界进行分段延伸, 分别采用 CATIA 提供的扫掠、填充生成延伸曲面的方法, 该方法简单、快速, 但曲面质量无法得到保证。王远峰等^[9]采用双向蒙皮造型技术对曲面进行重构, 以生成延伸曲面, 但重构曲面会导致原始曲面信息被改变且不方便调整。

本文提出一种基于产品零件边界信息并进行分段延伸的曲面延伸算法, 该方法通过利用产品零件边界信息实现延伸曲面保持边界随形, 同时采用分段延伸解决拼接曲面延伸可能产生的重叠、缝隙等问题, 最后采用双向蒙皮并利用产品边界跨界切向构造延伸曲面, 保证边界 G1 连续。实际测试中, 该算法具有稳定可靠、自动化程度高、曲面质量好等优点, 可有效缩短整个模面设计的周期。

1 算法模型

1.1 延伸算法参数

边界延伸的输入参数包括: 产品面、产品边界, 以及控制点信息, 通过指定产品边界上多个控制点的延伸距离, 可以实现产品边界上不同位置延伸不同距离, 其中, 20 和 40 mm 为用户指定延伸点处的距离。输出参数为延伸曲面。

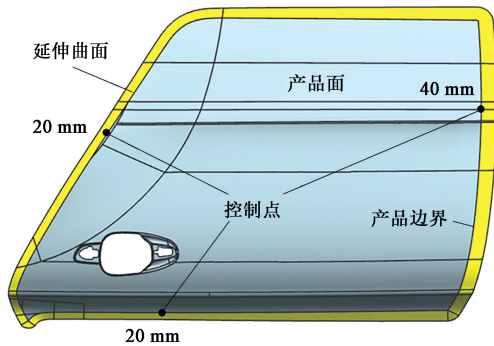


图 1 边界延伸示意图

Fig. 1 Schematic diagram of boundary extension

1.2 算法流程

本文提出的边界延伸算法的流程如下:

- (1) 离散产品边界, 得到离散点;
- (2) 根据输入的产品面, 获取离散点处的产品边界信息 (点在曲线上切向和在曲面上法向);
- (3) 通过离散点处的产品边界信息, 计算边界上离散点处的基准延伸方向;
- (4) 获取产品边界上的 Edge 点 (产品面上非边界的 Edge 与产品边界的交点), 确定 Edge 点处的延伸方向;
- (5) 使用 Edge 点处的延伸方向调整其余离散点的延伸方向;
- (6) 根据 Edge 点、尖点、延伸方向自相交情况和延伸曲线的光顺程度等信息, 确定分段;
- (7) 采用离散点所确定的延伸点插值得到延伸曲面新边界;
- (8) 使用双向蒙皮曲面和填充曲面分段构造延伸曲面。

2 关键技术

2.1 延伸方向随形

本文采用 NX 平台提供的获取曲面信息功能, 获取产品边界离散点处的产品边界信息, 如离散点处产品边界线切向、离散点处产品边界面法向, 得到产品边界信息后, 主要通过确定产品边界基础延伸方向、确定 Edge 点处的延伸方向和调整延伸方向 3 个步骤实现延伸方向随形。

2.1.1 产品边界基础延伸方向的确定

为了保证延伸曲面在边界处的 G1 连续性, 离散点处的延伸方向必须在产品面在该离散点处的切平面上, 因此, 采用如图 2 所示的曲面边界向外的跨界切矢方向 V_a 作为产品边界的基础延伸方向, $V_a = \tau \times N$, 其中, τ 为离散点在曲面边界上的单位切向, N 为离散点在产品边界面上的单位法向。在尖点处分别使用左右两切向计算得到两基础延伸方向。

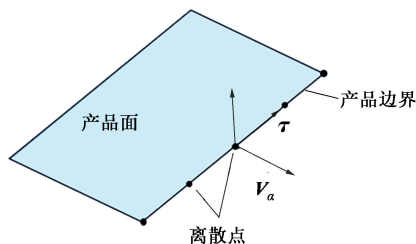


图 2 计算基础延伸方向示意图

Fig. 2 Schematic diagram of calculation for basic extension direction

2.1.2 Edge 点处延伸方向的确定

对于复杂拼接曲面, 基础延伸方向无法较好地描述产品边界处向外延伸的趋势 (图 3a), 延伸方向一般选择产品面曲率半径最大的方向, 这个方向上产品面切向的变化率最小, 且延伸后曲面与产平面主曲率方向一致, 过渡自然, 而 Edge 点所在 Edge 的切向一般就是曲面边界上曲率半径最大的方向。基于此, 优先确定 Edge 点处的延伸方向, 即 Edge 点所在 Edge 的切向 (图 3b)。

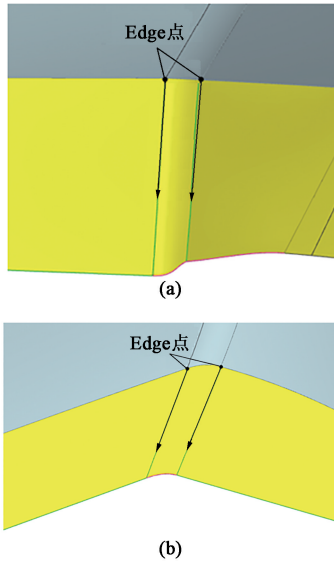


图3 Edge 点的延伸方向示意图

(a) 基础延伸方向 (b) Edge 切向

Fig. 3 Schematic diagrams of extension direction for Edge points

(a) Basic extension direction (b) Tangent of edge

2.1.3 延伸方向的调整

在确定 Edge 点处的延伸方向后, 接下来就需要调整离散点的基础延伸方向, 如图 4 所示。首先计算相邻 Edge 点 a 、 b 处的延伸方向 V_1 、 V_2 与其基础延伸方向的夹角 α 、 β , 然后在两 Edge 点之间, 采用根据弧长进行线性插值的方式, 即:

$$\alpha_l = \alpha + \frac{L_{al}}{L_{ab}}(\beta - \alpha) \quad (1)$$

式中: α_l 为两 Edge 点间第 l 个离散点处的待旋转角度; L_{al} 为 Edge 点 a 与第 l 个离散点间的弧长; L_{ab} 为 Edge 点 a 、 b 间的弧长。

由式 (1) 得到中间离散点处的角度 $\alpha_1 \sim \alpha_3$; 且设置最大影响距离 L , 与 Edge 点的距离大于 L 的离散点处的旋转角度为 0° , 距离小于 L 的离散点处的旋转角度为 α 、 β 与 0° 的弧长插值结果, 得到两端离散点处的角度 β_1 、 β_2 、 γ_1 、 γ_2 及 0° , 即为离散点处基础延伸方向的待旋转角度。最后将离散点处

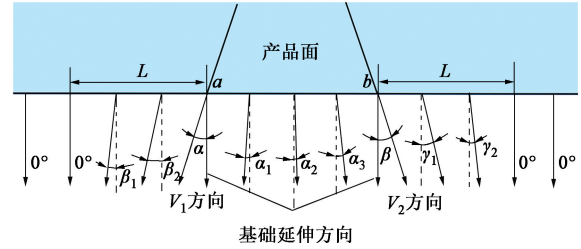


图4 调整离散点处延伸方向示意图

Fig. 4 Schematic diagram of extension direction adjustment on discrete points

基础延伸方向绕离散点处曲面法向旋转待旋转角度得到延伸方向。

延伸方向的改变会影响实际延伸距离, 因此, 需要根据原始延伸距离 d 和延伸方向与基础延伸方向的夹角 α 计算得到新延伸距离 d' , $d' = d / \cos \alpha$, 使实际延伸距离符合用户输入。

2.2 分段延伸

在进行产品边界延伸时, 采用传统的分段延伸依然会出现褶皱、波浪等曲面质量问题, 这是因为复杂的产品边界上形状的变化会经延伸方向延伸后发生放大或聚集, 特别是内凹和尖点位置, 边界上离散点与延伸点的对应关系不适合使用扫描算法生成延伸曲面。为了解决上述问题, 本文算法提出以下 3 种分段方式。

(1) 基于边界特征分段

对于飞机蒙皮和汽车覆盖件这种复杂拼接曲面, 如图 5 所示, 使用 Edge 点进行分段可以使延伸曲面与产品面的拓扑关系一致, 使用尖点进行分段是为了避免整体延伸构面时产品边界在尖点处退化为一一点而导致出现曲面褶皱的情况。尖点处采用圆弧段连接左右延伸曲线, 单独生成扇形曲面作为延伸曲面。

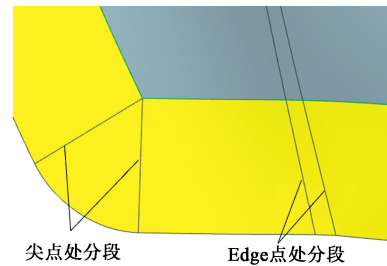


图5 边界信息分段

Fig. 5 Segmentation for boundary information

(2) 自相交分段

如图 6 所示, 对每个离散点处确定的延伸方向, 利用已有自相交检查算法确定自相交区域^[10], 自相交区域内离散点不再延伸, 而是通过对自相交区域

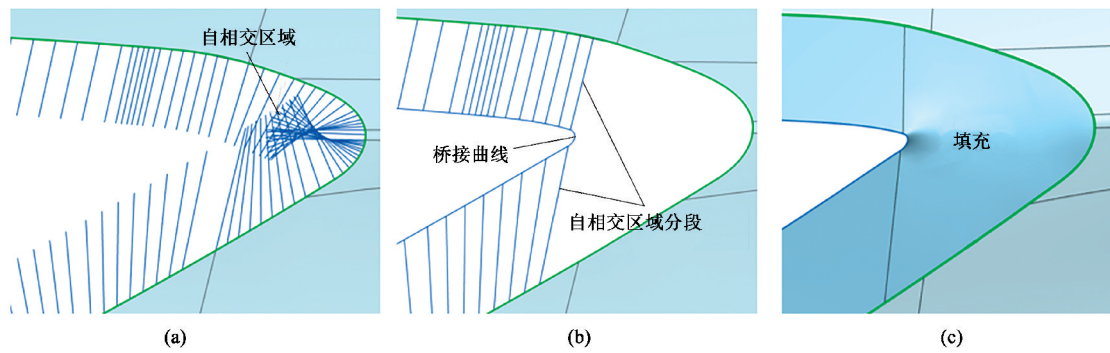


图 6 自相交区域分段

(a) 确定自相交区域 (b) 桥接处理 (c) 填充曲面

Fig. 6 Segmentation for self-intersection region

(a) Determination of self-intersection region (b) Bridging processing (c) Surface filling

两端的延伸曲线做桥接曲线, 作为自相交区域的延伸曲线, 且自相交区域采用填充方式生成延伸曲面, 解决自相交区域扫描构面可能产生的褶皱问题。

(3) 延伸新边界波浪分段

直接使用由延伸方向和延伸距离确定的延伸点构造延伸曲线并不能保证延伸曲线的光顺性, 且生成的延伸曲面会产生波浪。

本算法使用相邻离散点的连线的角度变化判断由这些离散点构造的曲线的光顺性。如图 7 所示, 由相邻离散点 P_2 、 P_3 、 P_4 和 P_5 , 得到连线 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 、 $\overrightarrow{P_3P_4}$ 和 $\overrightarrow{P_4P_5}$, 相邻连线计算沿 Z 方向的夹角为 γ 和 θ 。若两夹角的方向相反且角度较大, 则视为波浪, 波浪区域相关离散点不再延伸, 得到初始波浪范围端点 P_2 和 P_5 ; 再根据左右两端延伸曲线切向 ($\overrightarrow{P_5P_6}$ 和 $\overrightarrow{P_2P_1}$) 及两端点连线的夹角判断是否需要向两侧扩展, 直至夹角符合阈值为止, 得到扩展后的波浪区域。

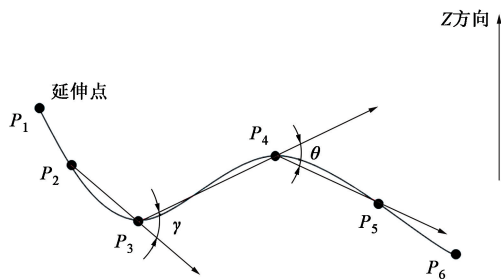


图 7 判断新边界波浪示意图

Fig. 7 Schematic diagram of judgement for new boundary wave

波浪区域采用两端点的桥接曲线作为延伸曲线, 使用填充方法构造延伸曲面以消除直接构面会产生的波浪和褶皱。

2.3 双向蒙皮构造 G1 延伸曲面

在飞机蒙皮和汽车覆盖件模面设计的过程中, 同

步模面中曲面延伸得到的工艺补充面和加工模面中曲面延伸得到的刀块模具面对延伸边界处的连续性要求为 G1。算法中对于延伸曲面构造的具体流程如下。

(1) 构造截面线及引导线

构造延伸曲面需要确定截面线及引导线, 其中使用离散点与延伸点所连直线作为截面线, 而引导线的其中一条即为原始产品边界线, 另一条为延伸曲面新边界线。如图 8 所示, 延伸曲面的新边界线根据上述分段处理后的不同区域得到的延伸曲线连接之后得到, 延伸段使用延伸点插值得到延伸曲线, 自相交段和新边界波浪段使用桥接曲线作为延伸曲线, 尖点区域使用圆弧作为延伸曲线。

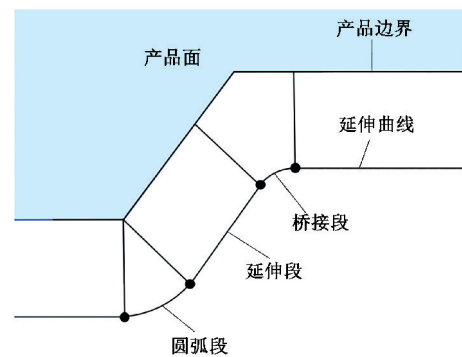


图 8 确定延伸曲线示意图

Fig. 8 Schematic diagram of determination for extension curve

(2) 双向蒙皮构造延伸曲面

对于曲面延伸得到的截面线和引导线网格, 使用双向蒙皮造型技术可以快速构造延伸曲面, 双向蒙皮造型技术的关键思想是曲面布尔和, 如图 9 所示, 即通过 U 方向曲线的插值曲面、 V 方向曲线的插值曲面和网格交点的插值曲面的布尔和来构造插值曲线网格的曲面^[11], 表达式为:

$$S_{(u, v)} = P_{(u, v_j)} + P_{(u_i, v)} - P_{(u_i, v_j)} \quad (2)$$

式中: $S_{(u,v)}$ 为双向蒙皮曲面; u 、 v 分别为插值曲面 U 、 V 方向的参数; u_i 为 V 方向曲线的 U 方向参数; v_j 为 U 方向曲线的 V 方向参数; i 、 j 分别为 U 、 V 方向的极点序号; $P_{(u,v)}$ 为插值 U 方向曲线的曲面; $P_{(u_i,v)}$ 为插值 V 方向曲线的曲面; $P_{(u_i,v_j)}$ 为插值网格交点的曲面。

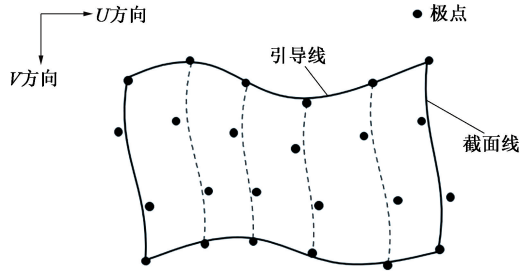


图 9 双向蒙皮曲面示意图

Fig. 9 Schematic diagram of bidirectional skinning surface

具体到本文算法中, 首先对引导线和截面线分别进行升阶和统一节点矢量处理; 再设引导线为 2 条 p 次曲线, 截面线为 n 条 q 次曲线, 使用单向蒙皮曲面插值方法构造 3 个相应的曲面 S_1 、 S_2 和 S_3 , 表达式为:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}^1 \quad (3)$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n+p-2} \sum_{j=0}^{mv} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}^2 \quad (4)$$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{n+p-2} \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}^3 \quad (5)$$

式中: S_1 为引导线插值的蒙皮曲面; $(nu+1)$ 为引导线极点个数; $N_{i,p}(u)$ 为 B 样条曲面在 U 方向基函数; $N_{j,q}(v)$ 为 B 样条曲面在 V 方向基函数; $P_{i,j}^1$ 为 S_1 的曲面极点; S_2 为截面线插值的蒙皮曲面; $(mv+1)$ 为截面线极点个数; $P_{i,j}^2$ 为 S_2 的曲面极点; S_3 为插值引导线和截面线交点的曲面; $P_{i,j}^3$ 为 S_3 的曲面极点。

统一 S_1 、 S_2 和 S_3 节点矢量后, 得到曲面 S'_1 、 S'_2 和 S'_3 , 最后使用布尔和的方式构造延伸曲面 S :

$$S = S'_1 + S'_2 - S'_3 \quad (6)$$

(3) 调整延伸曲面边界连续性

延伸曲面边界处的连续性要求为 G1, 通常使用曲面边界点处的跨界切矢数据对构造曲面进行约束^[12], 但实际上, 由于双向蒙皮操作的是曲面极点, 直接获取到的曲面边界点处的跨界切矢数据通常是没有意义的, 若将其作为曲面边界的连续性约束, 生成的曲面会具有大量极点, 曲面质量较差。本文利用近似算法, 即采样数据点、确定参数化和重新拟合曲线

的方式^[13], 对曲面边界线和曲面边界处的跨界切矢同时进行近似, 将曲面边界处的跨界切矢也视为一条曲线, 每个跨界切矢数据即为曲线上的一点, 近似后得到的新的曲面边界线的极点 C 可表示为:

$$C = \sum_{k=0}^s N'_{k,p}(u) P_k \quad (7)$$

与曲面边界处的跨界切矢的极点 D 可表示:

$$D = \sum_{k=0}^s N'_{k,p}(u) Q_k \quad (8)$$

式中: $(s+1)$ 为近似后曲线极点个数; $N'_{k,p}(u)$ 为近似后曲面边界线与曲面边界处的跨界切矢的共同基函数; P_k 为曲面边界线的极点; Q_k 为跨界切矢的极点, 且 Q_k 与 P_k 一一对应, 即 Q_k 为曲面边界 P_k 处的跨界切矢。

添加近似后曲面边界处的跨界切矢的极点 D 作为曲面边界约束进行双向蒙皮构造延伸曲面, 使延伸曲面能满足边界处的 G1 连续性要求, 且曲面极点个数适当。

3 实例效果展示

基于 NX 平台, 开发产品边界延伸功能, 实现满足边界连续性的延伸曲面的快速、稳定创建。

使用本系统对典型汽车覆盖件模型进行测试。模面设计中同步设计阶段的工艺补充面对模面的质量要求较低, 一般要求 G0 连续, 工艺设计阶段的翻边刀块面对模面质量要求较高, 一般要求 G1 连续。图 10 为使用此系统对汽车行李箱盖板进行边界延伸并进行延伸边界处曲面连续性分析的效果图, 可以看出, 该系统生成的延伸曲面的分段合理、延伸趋势跟随产品边界, 曲面质量较好。由曲面连续性分析可知, 在所设定的 G0 误差阈值为 0.01 mm、G1 误差阈值为 0.5° 的情况下, 生成延伸曲面与产品边界曲面 G0 的最大误差为 0.0092 mm、G1 最大误差为 0.4323°, 均小于所设定误差值, 满足曲面间的 G0、G1 连续性。

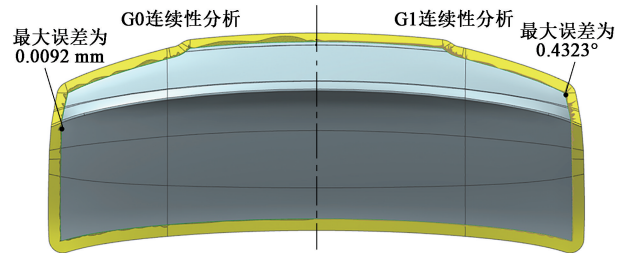


图 10 行李箱盖板延伸结果及连续性分析

Fig. 10 Extension result and continuity analysis of trunk cover plate

图 11 为所合作企业的设计人员对实际汽车覆盖件使用本文算法的结果图, 并与 AutoForm 进行对比。通过对比图 11a 和图 11b 发现, AutoForm 在内凹处延伸使用扫掠构造曲面, 导致延伸曲面出现褶皱, 而本文算法对自相交区域进行分段, 并使用填充方式构造曲面, 曲面质量更高; AutoForm 延伸新边界存在波浪、曲面不光顺的缺陷, 而本文算法优先考虑 Edge 点处的延伸方向, 使延伸曲面更符合产品边界向外延伸的趋势, 曲面质量更高。

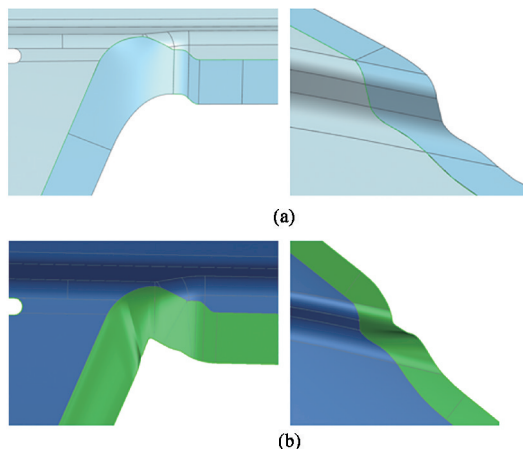


图 11 边界延伸效果对比

(a) 本文算法 (b) AutoForm

Fig. 11 Comparison of boundary extension effect

(a) Proposed algorithm (b) AutoForm

测试结果表明, 该功能延伸曲面与产品面之间达到了 G1 连续, 且曲面质量较好, 满足同步模面中冲压工艺补充面及加工模面的刀块模具的设计要求。

4 结论

(1) 本文提出的针对飞机蒙皮和汽车覆盖件中复杂曲面的边界延伸算法利用边界特征实现延伸曲面与原始曲面保持随形, 采用蒙皮曲面和填充曲面混合方式分段构造延伸曲面, 解决了拼接曲面延伸可能产生的重叠、褶皱等问题, 提高了曲面质量。

(2) 开发了基于跨界切向构造的双向蒙皮曲面方法, 保证了延伸边界处曲面的 G1 连续性。

(3) 经实际测试, 该算法生成的延伸曲面质量较好, 连续性满足同步模面中的冲压工艺补充面及加工模面的刀块模具的设计要求, 有效缩短了整个模面设计的周期。

参考文献:

[1] 徐家川, 范萍萍, 李迪. 汽车车身 A 面的基本曲面边界问题研

究 [J]. 汽车技术, 2013, 44 (6): 35-38.

Xu J C, Fan P P, Li D. A study on base surface boundary problem for auto-body class a surfaces [J]. Automobile Technology, 2013, 44 (6): 35-38.

[2] 崔令江. 汽车覆盖件冲压成型技术 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.

Cui L J. Stamping and Forming Technology of Automobile Covering Parts [M]. Beijing: China Machine Press, 2003.

[3] 周宇, 王小平, 张乐恩, 等. 网格化复杂曲面延拓算法研究 [J]. 机械科学与技术, 2020, 39 (12): 1963-1968.

Zhou Y, Wang X P, Zhang L E, et al. Study on extension algorithm of complex mesh surface [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2020, 39 (12): 1963-1968.

[4] 姜坤, 周雄辉, 黎旻, 等. 检具设计中延伸曲面修补方法 [J]. 上海交通大学学报, 2011, 45 (11): 1720-1724, 1730.

Jiang K, Zhou X H, Li M, et al. Extension surface reparation in checking fixture design [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2011, 45 (11): 1720-1724, 1730.

[5] Shetty S, White P R. Curvature-continuous extensions for rational B-spline curves and surfaces [J]. Computer-Aided Design, 1991, 23 (7): 484-491.

[6] 余正生, 雷毅. NURBS 曲线曲面延伸 [J]. 工程图学学报, 1997, 18 (1): 7-18.

Yu Z S, Lei Y. Extensions for NURBS curves and surfaces [J]. Journal of Engineering Graphics, 1997, 18 (1): 7-18.

[7] 刘辉强, 安鲁陵. 一种基于边界信息的曲面延拓方法 [J]. 机械制造与自动化, 2018, 47 (4): 25-28.

Liu H Q, An L L. Surface extension method based on boundary information [J]. Machine Building & Automation, 2018, 47 (4): 25-28.

[8] 何龙, 安鲁陵, 王小平, 等. 曲面延拓技术及其应用 [J]. 航空制造技术, 2015, 58 (15): 39-41.

He L, An L L, Wang X P, et al. Surface extension technology and its application [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2015, 58 (15): 39-41.

[9] 王远峰, 卫炜, 孙建华, 等. 模具型面设计中曲面快速延拓技术研究 [J]. 机械设计与制造工程, 2014, 43 (4): 25-31.

Wang Y F, Wei W, Sun J H, et al. Research on the surface rapid extension technology in mold surface design [J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2014, 43 (4): 25-31.

[10] 赵翔宇. 基于 NX 平台的汽车覆盖件包边曲面自动展开算法研究和开发 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2022.

Zhao X Y. Research and Development on NX-based Automatic Unfolding Algorithm for Hemming Surface of Automotive Panels [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2022.

[11] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

Shi F Z. CAGD & NURBS [M]. Beijing: Higher Education Press, 2013.

[12] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 1996.

[13] Rice J R. Algorithm-adapt, adaptive smooth curve fitting [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1975, 4 (1): 82-94.