

计算机应用

金属变形中产生的流形单元的处理方法

张帅¹, 章争荣^{1,2}

(1. 广东工业大学材料与能源学院, 广东广州 510000; 2. 广东省金属成形加工与锻压装备技术重点实验室, 广东顺德 528300)

摘要: 针对运用单纯形积分方法处理流形单元积分中高阶次函数时面临的公式复杂和计算量庞大的问题, 提出使用高斯积分方法对流形单元进行积分处理。基于数值流形方法, 对金属塑性成形过程进行数值模拟研究, 以模型镦粗为例, 取轴对称几何图形的右半部分进行研究, 建立了有限覆盖系统, 在自由边界和固定数学网格交点上设立特征跟踪点, 求出跟踪点的初始速度, 再用初始速度乘以时间步长得到跟踪点的位移坐标, 解决了有限覆盖系统上塑性变形自由运动界面精确跟踪的关键问题, 更新了流形单元的研究方法, 通过对产生的流形单元进行积分处理, 编写代码, 生成一套可行性算法, 为金属塑性成形计算机模拟提供了一种新的高精度高效率的数值方法。

关键词: 金属塑性变形; 数值流形方法; 有限覆盖; 流形单元; 高斯积分

DOI: 10.13330/j.issn.1000-3940.2024.10.035

中图分类号: TG316 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3940 (2024) 10-0265-04

Processing method of manifold elements produced in metal deformation

Zhang Shuai¹, Zhang Zhengrong^{1,2}

(1. School of Materials and Energy, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510000, China;

2. Guangdong Key Laboratory of Metal Forming Processing and Forging Equipment Technology, Shunde 528300, China)

Abstract: For the problems of complex formulas and large amount of calculation faced by using simplex integration method to handle the high-order functions in manifold element integration, the Gaussian integration method was proposed to integrate manifold elements. Then, based on the numerical manifold method, a numerical simulation study was conducted on the process of metal plastic forming. Furthermore, for the upsetting of model, the right half of the axisymmetric geometric shape was taken for research, the finite cover system was established, the feature tracking points were set up at the intersection of free boundary and fixed mathematical grid, the initial velocity of tracking points were calculated, and the displacement coordinates of tracking points were obtained by multiplying the initial velocity by the time step to solve the key problem of accurate tracking for the plastic deformation free motion interface on the finite cover system and update the research method of manifold elements. By integrating the generated manifold elements and writing codes, a feasible algorithm is generated, which provides a new high-precision and high-efficiency numerical method for the computer simulation of metal plastic forming.

Key words: metal plastic deformation; numerical manifold method; finite cover; manifold element; Gauss integration

数值流形方法是一种处理金属大变形的创新计算策略, 它综合了有限元、非连续变形分析和解析解等多种计算方法^[1-5]。这种方法综合了有限单元法和有限体积法的优势, 旨在解决各个方法的局限性。具体来说, 该方法能够应对有限单元法中存在的网格划分和畸变问题^[6-7], 以及有限体积法在自

由界面确定方面的问题^[8-9]。因此, 数值流形方法为解决一系列物理问题提供了一种高效的计算框架, 展现出广阔的应用潜力^[10-11], 也为多物理场耦合变形的数值模拟开辟了新的途径, 是一种具有深远理论和实践意义的前沿技术。深入研究基于数值流形的大变形数值模拟, 不仅能够丰富相关理论, 还能推动实际应用的创新与发展。

本文针对平砧板镦粗变形过程, 基于数值流形方法进行数值模拟, 其中, 数学网格采用固定的矩形网格^[12], 材料本身作为物理网格, 并分别采用不同阶次的覆盖函数^[13], 讨论了自由运动边界问题的处理方法, 并对变形后的流形单元处理方法进行研究。

收稿日期: 2024-01-27; 修订日期: 2024-04-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52175294)

作者简介: 张帅 (1997-), 男, 硕士

E-mail: 2395790977@qq.com

通信作者: 章争荣 (1969-), 男, 博士, 教授

E-mail: zsr@gdut.edu.cn

1 数值流形方法基本理论

有限覆盖系统中包含物理网格和数学网格，其中，数学网格用标准矩形表示，两种网格互相重叠形成的物理覆盖结合了数学网格和物理网格的关键特性，在此框架内，物理网格精确地刻画了材料中的裂纹、边界、块体结构和不同材料之间的交界面。对于二维模型，其应用的流形方法在物理覆盖 U_i 上的覆盖位移函数可以定义为 $u_i(x, y)$ 和 $v_i(x, y)$ ：

$$\begin{cases} u_i(x, y), (x, y) \in U_i \\ v_i(x, y), (x, y) \in U_i \end{cases} \quad (1)$$

式中： $u_i(x, y)$ 和 $v_i(x, y)$ 为 X 和 Y 方向的覆盖位移函数； x 和 y 为 X 和 Y 方向位移； i 为总体覆盖节点的 X 方向坐标。

覆盖位移函数可以为常量，或者为线性函数、高阶多项式或局域级数。这些覆盖位移函数用权函数 $\omega_i(x, y)$ 连接在一起，该权函数需满足：

$$\begin{cases} \omega_i(x, y) \geq 0, (x, y) \in U_i \\ \omega_i(x, y) = 0, (x, y) \notin U_i \\ \sum_{(x, y) \in U_i} \omega_i(x, y) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

于是，通过权函数和各覆盖位移函数可以确定物理覆盖的总体位移函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ ：

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) \begin{cases} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{cases} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [T_{(i,j)}(x, y)] \{D''_{(i,j)}\} = \sum_{i=1}^n [T_i(x, y)] \{D''_i\} \quad (3)$$

式中： $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 为 X 和 Y 方向的整体位移函数； T 为覆盖矩阵； D'' 为覆盖自由度；下角标 (i, j) 为单个覆盖中节点的 X 和 Y 方向坐标；下角标 i 为总体覆盖中节点的 X 方向坐标； $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ ； n, m 为节点数。

覆盖位移函数通常取下面形式之一。

(1) 覆盖 U_i 上的常量函数，见式 (4)：

$$\begin{cases} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} d_{i1} \\ d_{i2} \end{cases} \quad (4)$$

(2) 覆盖 U_i 上的完全一阶近似，见式 (5)：

$$\begin{cases} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{pmatrix} \begin{cases} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \\ d_{i4} \\ d_{i5} \\ d_{i6} \end{cases} \quad (5)$$

式中： $d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}, d_{i5}$ 和 d_{i6} 为自由度。

当覆盖位移函数从零次变为高次时，变分单元的总位移函数是从低阶到高阶的多项式。随着所使用叠加位移函数阶数的增加，结果的精度也提高，可以在结构分辨率区域的不同位置采用不同形式的级数展开。

2 自由边界的处理

本文介绍的自由运动边界处理方法基于固定数学网格，如图 1 和图 2 所示，其中固定的数学网格用虚线表示，材料体的物理网格用实线表示， t, t_1 分别为变形开始时间和变形结束时间。使用圆柱体模型模拟运动过程，其中， Y 轴表示圆柱体高度方向， X 轴表示圆柱体半径方向。

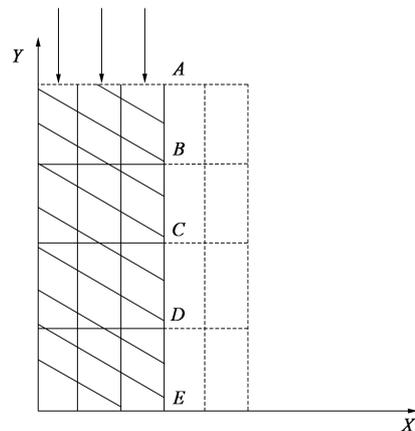


图 1 $t=0$ 时材料体的几何模型

Fig. 1 Geometric model of material body at $t=0$

图 1 中点 A, B, C, D, E 是材料体运动边界与数学网格的交点，首先计算出这 5 个关键点的速度，随后将这些速度值与时间步长相乘，再更新这些点的位置，得到如图 2 中所示的点 A', B', C', D', E' 。将更新后的点依次连接起来，并记录他们与数学网格的所有交点坐标，这样便形成了新的流形单元，这些单元即为后续积分计算的区域。

在流形单元的演化过程中，若发现新的单元形成，则需记录下这些新单元的节点编号；相对地，

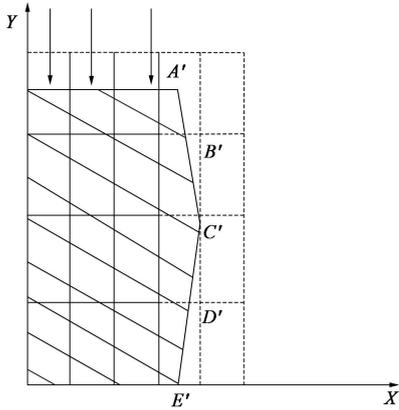


图 2 $t=t_1$ 时材料体的几何模型

Fig. 2 Geometric model of material body at $t=t_1$

若某些流形单元在运动过程中消失，则相应地删除这些单元的信息，以保持数据的准确性和完整性。这一过程不仅提高了计算效率，还保证了数值模拟的精确性。整个变形过程需不断重复更新自由边界的位置，更新所有节点的速度，准备转入下一步 ($t=t_1$) 变形的计算，直至变形过程结束。

3 流形单元的积分处理

对于金属变形过程中产生的流形单元的处理，石根华^[6]根据流形单元给出了单纯形积分算法，在此基础上，林邵忠^[14]给出了 N 维单纯形积分的递推公式，这里采用高斯积分对流形单元进行积分处理，方法原理如下。

对于实际三角形 S 和标准三角形 \tilde{S} ，以及连续函数 $f(x, y)$ ，定义通过变换函数 M 将实际三角形 S 变换为标准三角形 \tilde{S} ，如式 (6) 和式 (7) 所示：

$$M = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \} \quad (6)$$

$$M(x, y) = [m_x(x, y), m_y(x, y)] \quad (7)$$

式中： $m_x(x, y)$ 和 $m_y(x, y)$ 为关于 x 和 y 的函数，表示 \tilde{S} 的坐标变换。

标准三角形 \tilde{S} 的坐标变换依赖于线性变换，假设 S 的坐标顶点为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 和 (x_3, y_3) 。对应标准三角形 \tilde{S} 的顶点坐标为 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 。为了将实际三角形映射至标准三角形，给出如式 (8) 所示的线性变换函数 M ：

$$\begin{cases} M(x_1, y_1) = (0, 0) \\ M(x_2, y_2) = (1, 0) \\ M(x_3, y_3) = (0, 1) \end{cases} \quad (8)$$

假设有式 (9)：

$$M(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (9)$$

式中： (x, y) 为实际三角形 S 的坐标； (\tilde{x}, \tilde{y}) 为标准三角形 \tilde{S} 的坐标。

可以给出如式 (10) 所示的线性变换方程：

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中： a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 为式 (11) 系数矩阵中的系数。

将给定的三角形的 3 个顶点的映射关系带入式 (10)，可以得到如式 (11) 所示的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

求解这个线性方程组可以得到线性变换的系数矩阵，再通过将待积分三角形的顶点坐标代入线性变换方程，得到实际三角形顶点在标准三角形上的坐标，并以此来计算高斯积分公式所需的节点和权重。

对于标准三角形 \tilde{S} ，记高斯积分的节点为 $\{(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\}_{i=1}^n$ ，其权重为 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^n$ 。则标准三角形上的高斯积分公式如式 (12) 所示：

$$\int_S f(x, y) dA = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) \quad (12)$$

式中： dA 为 S 的面积元素。

因为 M 是一个双射函数，故积分变量的变换公式如式 (13) 所示。

$$dA = |J| d\tilde{A} \quad (13)$$

式中： J 为雅可比矩阵； $d\tilde{A}$ 为 \tilde{S} 的面积元素。

可得到式 (14)：

$$\int_S f(x, y) dA = \int_{\tilde{S}} f[M(\tilde{x}, \tilde{y})] |J| d\tilde{A} \quad (14)$$

式中： $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ 为标准三角形对应的函数。

可以分为 3 个步骤来使用高斯积分计算式 (14)：

- (1) 按照标准三角形的方式计算 \tilde{S} 上的 $f[M(\tilde{x}, \tilde{y})]$ 在节点 $\{(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\}_{i=1}^n$ 的函数值，即 $f[M(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)]$ ；
- (2) 计算该节点对应的权重 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^n$ 在 \tilde{S} 中的

对应面积权重 (即 $|J| d\tilde{A}$)，用此面积权重乘以 $f[M(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)]$ 以及对应的节点权重 \tilde{w}_i ，再相加得到所求积分的近似值；

(3) 重复以上步骤来计算在实际三角形上的近似值。

针对不同流形单元，其积分结果如表 1 所示。

表 1 三角形的不同流形单元积分结果

Table 1 Integration results of different manifold elements

点 A 坐标	点 B 坐标	点 C 坐标	积分函数	积分结果
(0.0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	x^2	0.0689
(0.0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	x^2	0.2356
(0.5, 1)	(3, 2)	(2, 5)	x^2	14.8231
(4.0, 1)	(6, 3)	(0, 7)	x^2	118.5778

4 结语

本文介绍了一些数值流形方法的基础公式和理论，为材料体锻粗时的金属变形规律提供了一定的理论基础，当材料体锻粗变形时，会产生相应的流形单元，需要对新产生的流形单元进行积分处理。并以三角形流形单元为例，采用高斯积分方法对其进行积分。对于金属大变形过程中产生的流形单元，本文不同于单纯形积分方法，提出用高斯积分方法来计算流形单元，为流形单元的处理提供了一种新的算法和理论基础。

参考文献：

- [1] 潘帅琪, 张亚军, 张友良, 等. 三维数值流形法覆盖系统并行分区生成算法 [J]. 科学技术与工程, 2022, 22 (28): 12315-12323.
Pan S Q, Zhang Y J, Zhang Y L, et al. Parallel partition algorithm of cover system generation in three dimensional numerical manifold method [J]. Science Technology and Engineering, 2022, 22 (28): 12315-12323.
- [2] 熊帅, 李斯樵, 刘丽娟. 基于数值流形法在岩土工程中的应用 [J]. 绿色科技, 2022, 24 (4): 201-204.
Xiong S, Li S Q, Liu L J. The application of numerical manifold method in geotechnical engineering [J]. Journal of Green Science and Technology, 2022, 24 (4): 201-204.
- [3] 王方义, 郑宏. 无界域问题的数值流形法 [J]. 长江科学院院报, 2023, 40 (7): 110-117.
Wang F Y, Zheng H. Numerical manifold method for unbounded domain problems [J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2023, 40 (7): 110-117.
- [4] 杨亮, 杨永涛, 郑宏. 相场数值流形法模拟岩石裂纹扩展 [J]. 岩土力学, 2021, 42 (12): 3419-3427.
Yang L, Yang Y T, Zheng H. The phase field numerical manifold method for crack propagation in rock [J]. Rock and Soil Mechan-

- ics, 2021, 42 (12): 3419-3427.
- [5] 王欢欢, 郭明珠. 基于数值流形法的反倾层状岩质边坡倾倒破坏分析 [J]. 震灾防御技术, 2021, 16 (2): 346-351.
Wang H H, Guo M Z. Analysis of toppling failure of anti toppling rock slope based on numerical manifold method [J]. Technology for Earthquake Disaster Prevention, 2021, 16 (2): 346-351.
- [6] 石根华. Numerical Manifold Method (NMM) and Discontinuous Deformation Analysis (DDA) [M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
Shi G H. Numerical Manifold Method (NMM) and Discontinuous Deformation Analysis (DDA) [M]. Translated by Pei J M. Beijing: Tsinghua University Press, 1997.
- [7] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进 [J]. 岩土工程学报, 1998, 20 (6): 36-39.
Wang Z Y, Li Y P. Some improvements in the numerical manifold method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20 (6): 36-39.
- [8] 范平, 杨超. 一种新型高精度界面跟踪数值方法初探 [A]. 樊菁. 第七届全国流体力学学术会议论文摘要集 [C]. 桂林, 2012.
Fan P, Yang C. Preliminary exploration of a new high precision interface tracking numerical method [A]. Fan J. Collection of Abstracts from the 7th National Conference on Fluid Mechanics [C]. Guilin, 2012.
- [9] 黄致林, 章争荣. 金属大塑性变形数值流形方法的研究 [J]. 热加工工艺, 2014, 43 (23): 145-148.
Huang Z L, Zhang Z R. Research on numerical manifold method of metallic large plastic deformation process [J]. Hot Working Technology, 2014, 43 (23): 145-148.
- [10] 于传浩, 张毅. 基于 Dynaform 的凸缘圆筒件拉深工艺有限元分析 [J]. 锻压技术, 2022, 47 (2): 56-61.
Yu C H, Zhang Y. Finite element analysis on drawing process for cylinder parts with flange based on Dynaform [J]. Forging & Stamping Technology, 2022, 47 (2): 56-61.
- [11] 廖斌, 张流锟, 吴晓东, 等. 6005A 铝合金薄壁型材压弯成形有限元分析及试验 [J]. 锻压技术, 2023, 48 (1): 128-135.
Liao B, Zhang L K, Wu X D, et al. Finite element analysis and experiment on press bending for 6005A aluminium alloy thin-walled profile [J]. Forging & Stamping Technology, 2023, 48 (1): 128-135.
- [12] 苏海东. 固定网格的数值流形方法研究 [J]. 力学学报, 2011, 43 (1): 169-178.
Su D H. Study on numerical manifold method with fixed meshes [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43 (1): 169-178.
- [13] 张友良, 莫思阳. 数值流形法覆盖系统并行生成算法研究 [J]. 长江科学院院报, 2020, 37 (10): 1-8.
Zhang Y L, Mo S Y. Parallel algorithm of cover system generation in numerical manifold method [J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2020, 37 (10): 1-8.
- [14] 林绍忠. 单纯形积分的递推公式 [J]. 长江科学院院报, 2005 (3): 32-34.
Lin S Z. Recursive formula for simplex integration [J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2005 (3): 32-34.